This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

THE GIFT OF

Mrs. C. K. Wead

# Auflösungen

zu den

# Aufgaben aus der Physik.

C. K. Head

# Auflösungen

zu den

# Aufgaben aus der Physik.

---

Zum Gebrauche

für

**Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht**

bearbeitet

von

Dr. C. Arnd Fliedner,
Prorector am Königlichen Gymnasium in Hanau.

---

Mit 106 in den Text eingedruckten Holzstichen.

---

**Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage.**

---

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1876.

Die Herausgabe einer Ueberſetzung in franzöſiſcher und engliſcher Sprache, ſowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

0197.15 F.G.

# Inhalt.


| | | Seite |
|---|---|---|
| Auflösungen zu Abschnitt | I. der Aufgaben | 1 |
| " " " | II. der Aufgaben | 5 |
| " " " | III. der Aufgaben | 10 |
| " " " | IV. der Aufgaben | 15 |
| " " " | V. der Aufgaben | 21 |
| " " " | VI. der Aufgaben | 29 |
| " " " | VII. der Aufgaben | 34 |
| " " " | VIII. der Aufgaben | 40 |
| " " " | IX. der Aufgaben | 48 |
| " " " | X. der Aufgaben | 53 |
| " " " | XI. der Aufgaben | 56 |
| " " " | XII. der Aufgaben | 58 |
| " " " | XIII. der Aufgaben | 60 |
| " " " | XIV. der Aufgaben | 61 |
| " " " | XV. der Aufgaben | 64 |
| " " " | XVI. der Aufgaben | 66 |
| " " " | XVII. der Aufgaben | 70 |
| " " " | XVIII. der Aufgaben | 80 |
| " " " | XIX. der Aufgaben | 83 |
| " " " | XX. der Aufgaben | 93 |
| " " " | XXI. der Aufgaben | 103 |
| " " " | XXII. der Aufgaben | 106 |
| " " " | XXIII. der Aufgaben | 112 |
| " " " | XXIV. der Aufgaben | 115 |
| " " " | XXV. der Aufgaben | 118 |
| " " " | XXVI. der Aufgaben | 122 |
| " " " | XXVII. der Aufgaben | 124 |
| " " " | XXVIII. der Aufgaben | 135 |
| " " " | XXIX. der Aufgaben | 151 |
| " " " | XXX. der Aufgaben | 161 |
| " " " | XXXI. der Aufgaben | 169 |
| " " " | XXXII. der Aufgaben | 173 |
| " " " | XXXIII. der Aufgaben | 179 |


mula 2 Bd 4 - 27 38

274281

# Auflösungen zu I.

1. $s = 10 \,.\, {}^1/_2 \,.\, 60 \,.\, 60 = 18000$ m $= 18$ Km.

2. $v = \dfrac{7500}{60 \cdot 60} = 2 \cdot 0833 \ldots$ m.

3. a) In 8·75 Minuten. b) In ungefähr 15 Jahren. c) $11^1/_9$mal.

4. 0·8 m.

5. Bezeichnet $t$ die Zeit in Secunden, welche vom Abgang des ersten Boten bis zum Einholen durch den zweiten verflossen ist, so hat bis dahin der erste Bote einen Weg von $\dfrac{4000}{3600} \,.\, t = \dfrac{10}{9} \,.\, t$ m, der zweite einen Weg von $\dfrac{4800}{3600}\,(t - 7200) = \dfrac{4}{3}\,(t - 7200)$ Fuß zurückgelegt, und da diese Wege einander gleich sein müssen, so hat man die Bestimmungs-Gleichung $\dfrac{10}{9}\,t = \dfrac{4}{3}\,(t - 7200)$, woraus $t = 43\,200$ Secunden $= 12$ Stunden folgt. Daraus ergiebt sich der von jedem der beiden Boten zurückgelegte Weg $= \dfrac{10}{9} \,.\, 43\,200 = 48\,000$ m $= 48$ Km.

6. Durch ein Rechteck, in welchem die eine Seite die Geschwindigkeit, die andere Seite die Zeit, der Flächeninhalt aber den Weg ausdrückt.

7. 3·5 m.

8. 0·5 m.

9. Die resultirende Geschwindigkeit ist $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; die Richtung der resultirenden Geschwindigkeit bildet mit der Richtung des Kahns einen Winkel von nahe $36^0 52'$.

10. $v = 11 \cdot 92$ m.

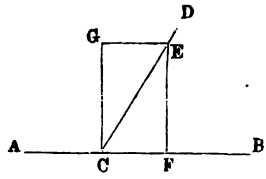
11. Die resultirende Geschwindigkeit $= 17 \cdot 6$ m; ihre Richtung schließt mit der ersten Seitengeschwindigkeit einen Winkel von $40^0 30' 44''$ ein.

12. Die gesuchte Seitengeschwindigkeit muß = 20·8 m und der Winkel, den sie mit der Richtung der Resultirenden bildet, = 30° sein.

13. Aus 0·6 : 0·5 = 13·5 : $x$ folgt $x = 11{\cdot}25$ m.

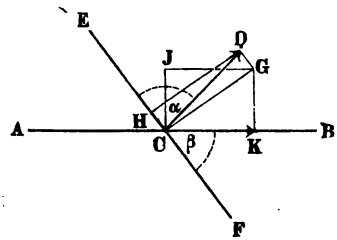
14. Es sei $AB$ (Fig. 1) die Längenaxe des Schiffs, $CD$ die Richtung des Zugs und $CE$ stelle die Geschwindigkeit von 5 Fuß dar. Zerlegt man $CE$ in die beiden auf einander senkrechten Seitengeschwindigkeiten $CF$ und $CG$, so ist $CE = 5 \,.\, cos\ 60^0 = 2{\cdot}5$ Fuß die Richtung und Geschwindigkeit des Schiffs, da die andere Seitengeschwindigkeit $CG$ durch den Widerstand des Wassers aufgehoben wird.

Fig. 1.




16. Man zerlege die Geschwindigkeit $CD$ (Fig. 2) in die beiden Seitengeschwindigkeiten $CH$ und $CG$, wovon die letztere allein wirksame auf $EF$ senkrecht steht, zerlege $CG$ wieder in die auf der Schiffsrichtung $AB$ senkrechte Componente $CJ$ und die in die Schiffsrichtung fallende Componente $CK$, so ist diese letztere die gesuchte Geschwindigkeit. Durch Rechnung findet sich $CG = HD = c\ sin\ \alpha$ und daraus

Fig. 2.




$$CK = CG\ cos\ (90 - \beta) = c\ sin\ \alpha\ .\ sin\ \beta = 4{\cdot}1826 \text{ Fuß}.$$

Die zweite Frage betreffend, so ergiebt sich, da $sin\ \alpha\ .\ sin\ \beta = \frac{cos\ (\alpha - \beta) - cos\ (\alpha + \beta)}{2}$ ist, der letztere Ausdruck aber am größten wird, wenn $cos\ (\alpha - \beta) = 1$, also $\alpha - \beta = 0$ oder $\alpha = \beta$ ist, daß die Geschwindigkeit des Schiffs am größten wird, wenn das Segel mit der Windrichtung und mit der Schiffsrichtung gleiche Winkel einschließt.

17. Durch ähnliche Behandlung wie die vorige Aufgabe findet sich die Geschwindigkeit $= \frac{1}{2}\ c = 4$ Fuß.

18. Mittelst der Figur der Aufgabe ergiebt sich $CG = HD = c\ sin\ 30^0 = 8 \,.\, 0{\cdot}5 = 4$ Fuß, also

$x = CJ = CG\ cos\ 60^0 = 2$ Fuß; $y = CK = CJ\ cos\ 60^0 = 1$ Fuß.

19. Zerlegt man die Geschwindigkeiten $c_1$ und $c_2$ nach den Richtungen des Parallelkreises und des Meridians, so findet man, daß das Schiff nach einer Stunde entfernt ist

vom Meridian durch $A$ um $4\ sin\ 40^0 - 2{\cdot}5\ cos\ 30^0 = 0{\cdot}4061$ Meilen nach Westen,

vom Parallelkreise durch $A$ um $4\ cos\ 40^0 - 2{\cdot}5\ cos\ 60^0 = 1{\cdot}8142$ Meilen nach Norden.

woraus sich die resultirende Geschwindigkeit = 1·859 Meilen nach Nordwesten, und der Winkel, welchen die resultirende Geschwindigkeit mit dem Parallelkreis einschließt, = 77°22′58″ ergiebt.

Man hätte auch zuerst die resultirende Geschwindigkeit und deren Richtung und alsdann die senkrechten Componenten berechnen können.

**20.** Die resultirende Geschwindigkeit ist

$= \sqrt{2{\cdot}5^2 + 1{\cdot}9^2 + 2 \,.\, 2{\cdot}5 \,.\, 1{\cdot}9 \cos 130^0} = 1{\cdot}937$ m, deren Richtung mit der Richtung der letzteren Geschwindigkeit einen Winkel $\varphi$ einschließt, der sich aus $\sin \varphi = \frac{1{\cdot}9 \sin 130^0}{1{\cdot}937} = 0{\cdot}7513$ zu 48°42′ bestimmt.

**21.** Im ersten Falle $4 \,.\, 9{\cdot}81 = 39{\cdot}24$ m, im zweiten $10 \,.\, 9{\cdot}81 = 98{\cdot}1$ m.

**22.** $\frac{9{\cdot}81}{2} \cdot 4^2 = 78{\cdot}48$ m und $\frac{9{\cdot}81}{2} \cdot 10^2 = 490{\cdot}5$ m. Oder: Am Ende der zehnten Secunde ist seine Geschwindigkeit $= 10 \,.\, 9{\cdot}81 = 98{\cdot}1$ m, also seine mittlere Geschwindigkeit $= \frac{98{\cdot}1}{2}$, also der während 10 Secunden zurückgelegte Weg $= 10 \cdot \frac{98{\cdot}1}{2} = 490{\cdot}5$ m.

**23.** $\frac{93{\cdot}75}{3} = 31{\cdot}25$ Fuß.

**24.** $t = \frac{100}{9{\cdot}81} = 10{\cdot}2$ Secunden; $s = 510{\cdot}3$ m.

**25.** Der Fall wird zwei-, bezüglich dreimal so lange gedauert haben, die zurückgelegte Strecke im ersten Falle viermal, im zweiten neunmal so groß gewesen sein als in voriger Aufgabe.

**26.** $\frac{2 \,.\, 1600}{20^2} = 8$ m.

**27.** $\frac{20\,000}{120^2} = 1{\cdot}39$ Fuß.

**28.** Bezeichnen $s$ und $s_1$ die in $n - 1$ und $n$ Secunden zurückgelegten Wege, sowie $g$ die Beschleunigung des freien Falls, so ist

$$s_1 - s = \frac{g}{2} [n^2 - (n-1)^2] = \frac{g}{2} (2n - 1).$$

**30.** Da die Beschleunigung $p = 4$ cm ist, so sind die durchlaufenen Wege $(\frac{1}{2} p t^2)$ bezüglich $= 8, 18, 32, 50$ u. s. w. cm.

**31.** $p = 6$ cm; $v = 30$ cm.

**32.** $v = p \,.\, t = 40$ Fuß; $s = \frac{1}{2} p t^2 = 80$ Fuß.

**33.** $v = 20 + 4 \,.\, 10 = 60$; $s = 9 \,.\, 20 + \frac{10}{2} \cdot 4^2 = 260$ Fuß.

**34.** $v = 10 - 0{\cdot}4 \,.\, 20 = 2$ m; $s = 10 \,.\, 20 - \frac{1}{2} \cdot 0{\cdot}4 \,.\, 20^2 = 120$ m.

35. Aus $10 - 20\,x = 0$ folgt $x = 0{\cdot}5$ m.

36. Aus den beiden Gleichungen $v = c + pt$ und $s = ct + \frac{1}{2}pt^2$ folgt

$$p = \frac{2(s - ct)}{t^2} = 0{\cdot}55 \text{ m}; \; v = \frac{2s - ct}{t} = 8 \text{ m}.$$

37. $s = \frac{18^2}{2 \,.\, 9{\cdot}81} = 16{\cdot}5$ m; $t = \sqrt{\frac{16{\cdot}5}{0{\cdot}5 \,.\, 9{\cdot}81}} = 1{\cdot}84$ Secunden.

38. Der Körper braucht, da er eben so lange steigt als fällt, 8 Secunden zum Niederfallen, sein Fallraum ist also $= {}^1/_2 \,.\, 9{\cdot}81 \,.\, 8^2 = 313{\cdot}92$, seine Anfangsgeschwindigkeit beim Aufsteigen, die der Endgeschwindigkeit beim Niederfallen gleich ist, $= 9{\cdot}81 \,.\, 8 = 78{\cdot}48$ m.

39. $x = 50 \,.\, 4 - {}^1/_2 \,.\, 9{\cdot}81 \,.\, 4^2 = 121{\cdot}52$ m.

40. $t = \frac{150 - 40}{9{\cdot}81} = 11{\cdot}2$ Secunden; $s = \frac{150^2 - 40^2}{2 \,.\, 9{\cdot}81} = 1014{\cdot}3$ m.

41. a) Aus $ct - {}^1/_2 \,gt^2 = h$ (Lehrb. §. 7, 5) folgt $t = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2gh}}{g}$, also $t_1 = 5{\cdot}238$ Secunden, $t_2 = 2{\cdot}102$ Secunden, wovon $t_2$ die Zeit angiebt, nach welcher der Körper beim Aufsteigen, $t_1$ die Zeit, nach welcher er bei Rückkehr die Höhe erreicht.

b) In der Formel $t = \frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{2\left(\frac{c^2}{2g} - h\right)}{g}}$ drückt $\frac{c}{g}$ die Zeit des Aufsteigens bis zum Augenblick der Rückkehr, $\frac{c^2}{2g}$ den während dieser Zeit zurückgelegten Weg, $\frac{c^2}{2g} - h$ den Weg, der über der gegebenen Höhe liegt, folglich $\sqrt{\frac{2\left(\frac{c^2}{2g} - h\right)}{g}}$ die Zeit aus, welche zum Durchlaufen dieses letzteren Wegstücks sowohl beim Aufsteigen als bei der Rückkehr erforderlich ist (Lehrb. §. 6, 3).

42. Bezeichnet $t_1$ die Zeit, welche der Schall braucht, um die Tiefe des Brunnens $= x$ zu durchlaufen, so hat man die beiden Bestimmungsgleichungen $x = {}^1/_2 g\,(t - t_1)^2$ und $t_1 = \frac{x}{m}$, und daraus findet sich durch Elimination von $t_1$ . . . $x = \frac{m}{g}\left[m + gt \pm \sqrt{m(m + 2gt)}\right]$, worin von den doppelten Zeichen hier nur das untere oder negative Zeichen zu gebrauchen ist.

Hierbei ist aber der Widerstand der Luft unberücksichtigt gelassen.

43. $x = \frac{1050}{31{\cdot}25}\left[1050 + 31{\cdot}25\,.\,25 - \sqrt{1050\,(1050 + 2\,.\,31{\cdot}25\,.\,25)}\right] = 5880$ Fuß,

ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

44. Durch ein rechtwinkeliges Dreieck, von welchem die eine Kathete die Zeit, die andere Kathete die Endgeschwindigkeit, der Flächeninhalt aber den Weg darstellt.

---

## Auflösungen zu II.

---

1. $P_1 : P_2 = (10\,.\,5) : (15\,.\,30) = 1 : 9$.

2. Im ersten Fall wie 5 : 30, im zweiten wie 10 : 15.

3. a. Aus $P : 1 = (M\,.\,p) : (1\,.\,1)$ folgt $P = M\,.\,p$ Krafteinheiten.
b. Von der gesammten (bewegenden) Kraft, welche einer Masse $M$ die Beschleunigung $p$ ertheilt, wird häufig der Theil, welcher auf die Masseneinheit wirkt und dessen Maaß also $p$ (Krafteinheiten) ist, durch die Bezeichnung beschleunigende Kraft unterschieden.

4. Da ein Kilogramm als eine Kraft zu betrachten ist, welche einer Masse von einem Liter (Cubikdecimeter) Wasser (bei 4° C.) eine Beschleunigung von $g$ (= 9·81) Metern ertheilt, oder was für die Größe derselben einerlei ist, als eine Kraft, welche einer Masse von $g$ Liter Wasser eine Beschleunigung von einem Meter ertheilt, so muß man, wenn man $P = Mp$ setzt, als Masseneinheit die Masse von $g$ Liter Wasser annehmen. Unter Zugrundelegung dieser Einheit ist also die Massenzahl $M$ . . . $g$ mal so klein als die Zahl $G$, welche das Gewicht der nämlichen Masse in Kilogrammen ausdrückt, oder es ist $M = \frac{G}{g}$ Masseneinheiten.

5. Da man das Gewicht von $\frac{1}{61{\cdot}8314}$ preuß. Cubikfuß Wasser ein Pfund nennt, also eine Kraft von einem Pfund einer Wassermasse von $\frac{g}{61{\cdot}8314}$ Cubikfuß (worin $g = 31{\cdot}25$) eine Beschleunigung von einem Fuß zu ertheilen vermag, so ist $\frac{g}{61{\cdot}8314}$ Cubikfuß Wasser die Einheit, welche der Massenzahl $M$ zu Grunde liegt, so daß die Masseneinheit $g$ mal so groß ist

als die Masse, welche ein Pfund wiegt, folglich die Massenzahl $M$ . . . $g$ mal so klein als die Pfundezahl $G$, d. h. $M = \frac{G}{g}$ ist.

6. a. $M = \frac{29{\cdot}43}{9{\cdot}81} = 3$ Masseneinheiten der Aufgabe 4.

b. $M = \frac{93{\cdot}75}{31{\cdot}25} = 3$ Masseneinheiten der Aufgabe 5.

7. a. Aus $P : 80 = 10 : 9{\cdot}81$ folgt $P = 81{\cdot}55$ Kg.

b. Aus $15 : 80 = p : 9{\cdot}81$ folgt $p = 1{\cdot}84$ m.

8. Aus $30 : 200 = x : g$ ergiebt sich die Beschleunigung $x = \frac{30}{200} g$ und daraus $v = \frac{30}{200} \cdot 9{\cdot}81 \,.\, 20 = 29{\cdot}43$ m.

9. $v_1 = 10 + \frac{30}{200} \cdot 9{\cdot}81 \,.\, 20 = 39{\cdot}43$ m.

10. Die Beschleunigung der Kraft $P$ ist $= \frac{5}{60}$ m, also hat man $P : 2000 = \frac{5}{60} : 9{\cdot}81$ und daraus $P = \frac{5}{60} \cdot \frac{2000}{9{\cdot}81} =$ nahe 17 Kg.

11. Ist $x$ der Druck auf die Hand beim Aufwärtsbewegen, also auch die Kraft, welche die Hand auf den Körper ausübt, so ist die Kraft, welche die Masse $\frac{G}{g}$ aufwärts bewegt, $= x - G$, also ist $x - G = \frac{G}{g} p$, folglich $x = G\left(1 + \frac{p}{g}\right) = 2\left(1 + \frac{0{\cdot}5}{9{\cdot}81}\right) = 2{\cdot}10$ Kg. Bezeichnet dagegen $y$ den Druck auf die Hand beim Abwärtsbewegen, so erhält man aus $G - y = \frac{G}{g} p$, $y = G\left(1 - \frac{p}{g}\right) = 1{\cdot}90$ Kg.

12. In beiden Fällen mit der Beschleunigung $g$ der Schwerkraft, wie aus voriger Auflösung hervorgeht,

13. Da hier die zu bewegende schwere Masse $= 5 + 3 = 8$ Kg, die bewegende Kraft aber $= 5 - 3 = 2$ Kg ist, so folgt aus $2 : 8 = p : g$, $p = {}^1/_4 g$.

14. Aus den beiden Gleichungen $P - q = \frac{G + P}{g} p$ und $s = \frac{1}{2} p t^2$ finden sich die beiden Unbekannten $p$ und $g$, nämlich

$$p = \frac{P - q}{G + P} g = \frac{9{\cdot}5 - 1{\cdot}5}{1265 + 9{\cdot}5} \cdot 9{\cdot}81 = 0{\cdot}062 \text{ m},$$

$$g = \frac{G + P}{P - q} \cdot \frac{2s}{t^2} = \frac{1265 + 9{\cdot}5}{9{\cdot}5 - 1{\cdot}5} \cdot \frac{2 \,.\, 1{\cdot}11}{6^2} = 9{\cdot}82 \text{ m}.$$

15. Aus der Gleichung $P - q = \frac{G + P}{g} p$ folgt $G = (P - q) \frac{g}{p} - P$

$= (P - q)\frac{t^2}{2s}g - P$. Durch Abziehen des Gewichts der beiden Metallstücke von $G$ findet sich dann die zur Umdrehung des Rädchens erforderliche Kraft.

17. a. Der Zeiteffect ist $100 \cdot 10 = 1000$ Secunden-Kg, d. h. der Effect ist derselbe wie der einer Kraft von 1000 Kg während 1 Secunde,
oder „ „ „ „ „ 500 „ „ 2 Secunden
u. s. w.

(nämlich es wird in einer Masse von $\frac{m}{n} \cdot \frac{1000}{9{\cdot}81}$ Masseneinheiten eine Geschwindigkeit von $\frac{n}{m} \cdot 9{\cdot}81$ m ertheilt).

b. Die Arbeit ist $= 100 \cdot 10 = 1000$ m-Kg, d. h. der Effect ist derselbe, wie der einer Kraft
von 1000 Kg, deren Angriffspunkt einen Weg von 1 m,
„ 500 „ „ „ „ „ „ 2 „
u. s. w. zurücklegt (nämlich es wird einer Masse von $\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{9{\cdot}81}$ Masseneinheiten eine Geschwindigkeit von $\sqrt{\frac{n}{m} \cdot 2 \cdot 9{\cdot}81}$ m ertheilt).

18. Die Aufgabe ist unbestimmt; es muß entweder die Zeit $t$, während welcher die Geschwindigkeit erlangt ist, oder der bis dahin zurückgelegte Weg $s$ gegeben sein; dann findet sich die Kraft $x$, in Kilogrammen ausgedrückt, aus $xt = \frac{24}{9{\cdot}81} \cdot 1800$, oder aus $xs = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{9{\cdot}81} \cdot 1800^2$.

19. Daß der gehobene Körper schon in dem Punkte, von welchem die Höhe $h$ gerechnet wird, die Hebungsgeschwindigkeit hat. Ist dies nicht der Fall, wird der Körper von der Ruhe aus auf die Höhe $h$ gehoben, so ist eine größere Arbeit dazu erforderlich. Hat nämlich der Körper schon im Anfangspunkte der Höhe die Hebungsgeschwindigkeit, so bedarf seine Hebung nur einer Kraft, die der Schwerkraft, welche auf den Körper wirkt, der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist, also einer nach oben gerichteten Kraft $= Q$, die Bewegung ist dann nur als Folge des Beharrungsvermögens des Körpers zu betrachten und die verrichtete Arbeit ist $= Qh$. Wird dagegen der Körper von der Ruhe aus auf die Höhe $h$ gehoben und kommt er auf dieser mit der Geschwindigkeit $v$ an, so ist die verrichtete Arbeit $= Qh + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2$, worin der zweite Theil (siehe II, 16 der Aufgaben) die Arbeit angiebt, welche nur zur Erzeugung der Geschwindigkeit $v$ erforderlich ist. Setzt man in diesem zweiten Theile $\frac{v^2}{2g} = h_1$, so wird die Hebungsarbeit durch $Q(h + h_1)$ ausgedrückt.

20. Der Zeiteffect der auf die Kugel wirkenden Kraft ist (nach II, 16 der Aufg.) $7200 \cdot \frac{1}{600} = \frac{0{\cdot}46}{31{\cdot}25} \cdot v$, woraus $v = 815$ Fuß folgt.

21. Die lebendige Kraft der Kugel ist $= \frac{12 \,.\, 500^2}{2 \,.\, 9{\cdot}81} = 152\,905$ m-Kg. Die Wirkung der Pulverkraft ist nach allen Richtungen dieselbe, auf die Kugel und den Lauf wirken also nach gerade entgegengesetzten Richtungen gleiche Kräfte, und diese wirken auch auf beide gleich lang, nämlich vom Augenblicke der Entzündung an bis zu dem, wo die Kugel die Mündung verläßt; es sind also die Zeiteffecte der auf Kugel und Lauf wirkenden Kräfte, folglich ihre Bewegungsgrößen einander gleich*). Ist $x$ die rückwärts gerichtete Geschwindigkeit des Geschützes in dem Augenblick, in welchem die Kugel mit der Geschwindigkeit von 500 m den Lauf verläßt, so muß $3600\,x = 12 \,.\, 500$, also $x = 1^2/_3$ m sein**). Die lebendige Kraft des Geschützes ist also $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3600}{9{\cdot}81} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 =$ nahe 510 m-Kg.

22. Die lebendige Kraft der Erdmasse ist $= \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \,.\, 10^{24}}{9{\cdot}81} \cdot 30\,000^2$ m-Kg, die Arbeit von $x$ Pferdekräften ist 75 $x$ m-Kg in einer Secunde, also in 6000 Jahren . . . 75 $x$ . 6000 . 365 . 24 . 60 . 60 m-Kg, und aus der Gleichsetzung dieser Ausdrücke folgt $x =$ etwas mehr als 16 Trillionen Pferdekräfte.

23. Die erforderliche Arbeit ist (nach II, 16 der Aufg.) gleich der lebendigen Kraft der zu bewegenden Masse von $\frac{20\,000}{31{\cdot}25}$ Masseneinheiten, also $= \frac{1}{2} \cdot \frac{20\,000}{31{\cdot}25} \cdot 30^2$ $= 0{\cdot}016 \,.\, 20\,000 \,.\, 900 = 288\,000$ Fußpfunde.

24. Der Hammer besitzt im Augenblick des Aufschlagens eine lebendige Kraft $= \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 = G h$, wenn $h = \frac{v^2}{2g}$ ist, also die Höhe bezeichnet, von welcher der Hammer hätte frei herabfallen müssen, um die Geschwindigkeit $v$ zu erlangen. Man kann sich also diese lebendige Kraft erzeugt denken durch die Arbeit, welche das Gewicht $G$ beim Durchlaufen der Strecke $h$ verrichtet. Zu dieser Arbeit kommt nun noch diejenige, welche das Gewicht $G$ während des Einsinkens des Nagels um die Strecke $s$ verrichtet; also ist die durch den Hammer verrichtete Arbeit $G(h + s)$. Anderentheils ist die durch bloßes Auflegen eines Gewichts $x$ auf den Nagel verrichtete Arbeit $xs$; folglich ist $xs = G(h + s)$,

---

*) Nicht aber deren Wegeffecte oder Arbeiten, da Kugel und Lauf, auf welche gleiche Kräfte wirken, bis zur Erlangung ihrer Geschwindigkeitsmaxima ungleiche Wege zurücklegen.

**) Wenn nämlich, was nur näherungsweise richtig ist, die wirkende Kraft constant angenommen wird.

also $x = \frac{G(h + s)}{s} = \frac{0.5\left(\frac{10^2}{2 \cdot 9.81} + 0.05\right)}{0.05} = 51.5$ Kg, also mehr als 100 mal so groß als das Gewicht des Hammers.

**25.** Ist $x$ der Druck (in Kilogrammen), welchen die Hand erleidet, also auch die Kraft, welche die Hand gegen den Körper ausübt, so ist die Arbeit dieser Kraft, während ihr Angriffspunkt die Höhe $h$ durchläuft, $= xh$. Diese Arbeit besteht aus zwei Theilen, wovon der eine $= Gh$ zur Ueberwindung des Widerstandes, nämlich des Körpergewichtes $G$, der andere zur Ertheilung einer gewissen Geschwindigkeit $c$ an die Masse $\frac{G}{g}$ dient, also $= \frac{1}{2}\frac{G}{g}c^2$, oder, wenn man die der Anfangsgeschwindigkeit $c$ entsprechende Steighöhe $\frac{c^2}{2g}$ mit $h_1$ bezeichnet, $= Gh_1$ ist. Man hat also $xh = Gh + Gh_1 = G(h + h_1)$, woraus $x = G\left(1 + \frac{h_1}{h}\right) = 1.5\left(1 + \frac{4}{0.6}\right) = 11.5$ Kg sich ergiebt.

**26.** Aus $x \cdot 240 = \frac{27\,000}{9.81}(14 - 7) = 19\,266$ Secunden-Kg folgt $x = \frac{19\,266}{240} = 80.28$ Kg.

**27.** Der durchlaufene Weg ist $= \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 180 = 3600$ Fuß, folglich die erforderliche Arbeit $= 75 \cdot 3600 + \frac{1}{2} \cdot \frac{20\,000}{31.25} \cdot 40^2 = 782\,000$ Fußpfunde.

**28.** a. Im Augenblick, wo der Dampf abgelassen wird, ist die Wirkungsfähigkeit der Locomotive, durch den Zeiteffect oder die Bewegungsgröße gemessen, $= \frac{20\,000}{31.25} \cdot 40 = 25\,600$ Secunden-Pfunde, also ist die Zeit, während welcher diese Wirkungsfähigkeit durch den 75 Pfd. betragenden Widerstand erschöpft wird, $= \frac{25\,600}{75} = 341\frac{1}{3}$ Secunden, folglich der Weg, den die Locomotive noch durchläuft, bis sie in Ruhe kommt, $= \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 341\frac{1}{3} = 6826\frac{2}{3}$ Fuß.

b. Die Arbeit der Dampfkraft ist vom Anfang der Bewegung an bis zum Beginn des Beharrungszustandes nach vor. Aufg. 782 000 Fuß-Pfde.,

| | | |
|---|---|---|
| während des Beharrungszustandes $= 75 \cdot 600 \cdot 40 =$ | 1 800 000 | „ „ |
| nach dem Ablassen des Dampfes $=$ . . . . . . . | 0 | „ „ |
| also die Gesammtarbeit der Dampfkraft $=$ . . . . | 2 582 000 | Fuß-Pfde. |

29. $K = 25\left(2 - \frac{3}{2{\cdot}5}\right)\left(2 - \frac{10}{8}\right) = 15$ Pfund.

30. Aus $40 = 30\left(2 - \frac{2{\cdot}5}{3}\right)\left(2 - \frac{z}{6}\right)$ folgt $z = 5\frac{1}{7}$ Stunden.

31. $z = 3$ Stunden.

---

## Auflösungen zu III.

1. $R = \sqrt{40^2 + 30^2 + 2 \,.\, 40 \,.\, 30 \cos 45^0} = 64{\cdot}785$ Kg, $\sin \alpha = \frac{30 \,.\, \sin 45^0}{64{\cdot}785}$, also $\alpha = 19^0 6' 49''$, $\sin \beta = \frac{40 \,.\, \sin 45^0}{64{\cdot}785}$, also $\beta = 25^0 53' 11''$.

2. $P_2 = R = \frac{40 \,.\, \sin 75^0}{\sin 30^0} = 77{\cdot}274$ Kg.

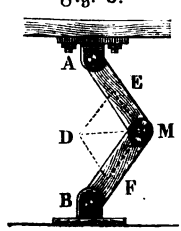
3. $\alpha = 133^0 25' 57''$, $\beta = 151^0 2' 42''$ (die Kraft $R$ ist der Richtung nach der Resultirenden von $P_1$ und $P_2$ entgegengesetzt).

4. Stellt $CD$ die Resultirende der beiden Kräfte $P_1$ und $P_2$ dar, so muß $R$ der Richtung nach der $CD$ entgegengesetzt, der Größe nach aber ihr gleich, also $R = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11{\cdot}662$ Kg sein.

5. $R = \sqrt{30^2 + 24^2 - 2 \,.\, 30 \,.\, 24 \,.\, \cos 75^0} = 33{\cdot}22$ Kg, $\sin \alpha = \frac{24 \,.\, \sin 75^0}{33{\cdot}22}$, also $\alpha = 44^0 55'$, wo $\alpha$ den Winkel bedeutet, den die erste Seitenkraft mit der Mittelkraft bildet. Die Beschleunigung $p = \frac{Rg}{G} = \frac{33{\cdot}22 \cdot 9{\cdot}81}{150} = 2{\cdot}172$ m.

6. Stellt $MD$ (Fig. 3) die Größe der Kraft $P$ dar, und man zerlegt sie in die beiden Seitenkräfte $ME$ und $MF$, von welchen die erste durch den Widerstand bei $A$ aufgehoben wird, die zweite aber den gesuchten Druck $Q$ darstellt, so hat man nach dem Ziehen von $DE$ und $DF$ aus dem Dreieck $MDF$:

Fig. 3.




$$\frac{MD}{MF} = \frac{P}{Q} = \frac{\sin MFD}{\sin MDF} = \frac{\sin 150^0}{\sin 75^0}$$

woraus $Q = \frac{P \,.\, sin\ MDF}{sin\ MFD} = \frac{P \,.\, sin\ 75^0}{sin\ 150^0} = \frac{20}{2 \,.\, cos\ 75^0} = 38{\cdot}637$ Kg folgt.

Die größtmöglichste Wirkung wird durch die Kniepresse erzeugt, wenn Winkel $MDF = 90^0$ und Winkel $MFD = 0$, d. h. Winkel $AMF' = 180^0$ ist.

7. Die horizontale Componente von $P$ ist $P_1 = P\ cos\ \alpha = 50\ .\ cos\ 40^0 = 38{\cdot}3$ Kg, die verticale $P_2 = P\ sin\ \alpha = 50\ sin\ 40^0 = 32{\cdot}14$ Kg; die letztere sucht den Körper vom Tische abzuziehen, es bleibt folglich der Druck auf den Tisch: $G - P_2 = 37{\cdot}86$ Kg.

8. Die durch die vereinte Wirkung der beiden Kräfte $P_1$ und $P_2$ stattfindende Beschleunigung $p$ ist der doppelte Weg in der ersten Secunde, also hier $p = 2\ .\ 6{\cdot}5 = 13$ m. Die Mittelkraft läßt sich also ausdrücken durch $P = \frac{G}{g} \cdot p = \frac{13\ .\ 110}{9{\cdot}81} = 145{\cdot}77$ Kg; daher $P_1 = \frac{P\ .\ sin\ 77^0}{sin\ (52^0 + 77^0)} = \frac{145{\cdot}77\ sin\ 77^0}{sin\ 51^0} = 182{\cdot}76$ Kg und $P_2 = \frac{145{\cdot}77\ sin\ 52^0}{sin\ 51^0} = 147{\cdot}81$ Kg.

9. Man suche aus zwei der gegebenen und durch Linien dargestellten Kräften die Mittelkraft, aus dieser und der dritten wieder die Mittelkraft u. s. w. Es ist aber

die Mittelkraft $Q$ der Kräfte $P_1$ und $P_2 = 34\,992$ Kg,
Winkel $P_1MQ = 33^0 30' 36''$;
die Mittelkraft $R$ der Kräfte $Q$ und $P_3 = 44{\cdot}14$ Kg,
Winkel $P_1MR = 56^0 15' 31{\cdot}8''$;
die Mittelkraft $P$ der Kräfte $R$ und $P_4$, d. h. die Resultirende der vier gegebenen Kräfte $= 30{\cdot}237$ Kg, sowie
Winkel $P_1MP = 89^0 18' 2{\cdot}3''$.

Man kann dabei das Verfahren in folgender Weise abkürzen:

Man braucht nur (Fig. 4) das Polygon $MP_1QRPM$ zu bilden, indem man die Seiten $MP_1$, $P_1Q$, $QR$, $RP$ den gegebenen Componenten $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, parallel und gleich macht, so ist die letzte, das Polygon schließende Seite $MP$ das Maaß der gesuchten Mittelkraft. Ein anderes Verfahren in Aufgabe 11.

Fig. 4.

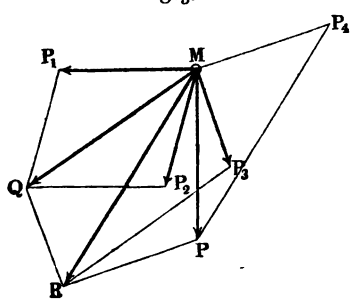
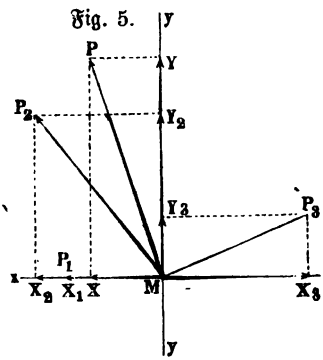



Fig. 5.



10. Man findet $P = 14{\cdot}6$ Kg, sowie Winkel $P_1 MP = 86^0 42' 37''$.

11. a. Durch Zeichnung: Man lege (Fig. 5) durch den Angriffspunkt $M$ der Kräfte beliebig eine Linie $Mx$*), nehme diese als Abscissenaxe an, sowie die Normale $My$ als Ordinatenaxe, zerlege jede der gegebenen Kräfte nach diesen beiden Richtungen in Seitenkräfte, z. B. $P_2$ in $MX_2$ und $MY_2$, addire (algebraisch) die Componenten auf beiden Axen, und suche zu diesen Summen $MX$ und $MY$ die Mittelkraft $MP$, so findet man diese $= 78$ Kg, sowie den Winkel, den ihre Richtung mit $P_1$ bildet, $= 73^1/_2{}^0$.

b. Durch Rechnung: Denkt man sich in die Richtung der Kraft $P_1$ die Axe $Mx$ und normal darauf die Axe $My$ gelegt, so hat man, wenn man die Winkel, welche die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ mit der Axe $Mx$ einschließen, mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ bezeichnet, also $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 56^0$, $\alpha_3 = 56^0 + 104^0 = 160^0$ ist, und wenn die Summe der Componenten auf der Axe $Mx$ durch $X$, auf der Axe $My$ durch $Y$ ausgedrückt wird,

$$X = 30 \,.\, cos\ 0^0 + 70 \,.\, cos\ 56^0 + 50 \,.\, cos\ 160^0 = 22{\cdot}16 \text{ Kg.}$$
$$Y = 30 \,.\, sin\ 0^0 + 70 \,.\, sin\ 56^0 + 50 \,.\, sin\ 160^0 = 75{\cdot}13 \text{ Kg.}$$

Bezeichnet man den Winkel, den die Mittelkraft mit der Axe $Mx$ einschließt, mit $\varphi$, so ist

$$tang\ \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{75{\cdot}13}{22{\cdot}16} = 3{\cdot}3903, \text{ also } \varphi = 73^0 34',$$

die Mittelkraft

$$P = \sqrt{X_2 + Y_2} = \frac{X}{cos\ \varphi} = \frac{Y}{sin\ \varphi} = 78{\cdot}33 \text{ Kg.}$$

12. $X = 4{\cdot}193$ Pfd., $Y = 8{\cdot}4546$ Pfd.

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = 9{\cdot}4372 \text{ Pfd.},$$

$$tang\ \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{8{\cdot}4546}{4{\cdot}193}, \text{ also } \varphi = 63^0 37' 16'',$$

wo $\varphi$ die Neigung von $P$ gegen die Axe der $X$ bedeutet.

13. $$P = \sqrt{(-\ 89{\cdot}0289)^2 + (38{\cdot}2916)^2} = 96{\cdot}915 \text{ Pfd.}$$

$$tang\ \varphi = \frac{-\ 89{\cdot}0289}{38{\cdot}2916} = -\ 2{\cdot}325029 = tang\ (-\ 66^0 43' 38'') =$$

$tang\ 293^0 16' 22''$, wodurch der Winkel bestimmt wird, den die Mittelkraft $P$ mit der durch den Angriffspunkt gelegten Axe der $X$ bildet.

14. Legt man die Abscissenaxe in die Richtung der ersten Kraft und den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte des Körpers, so sind $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 160^0$, $\alpha_3 = 314^0 48'$ die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit der Abscissenaxe bilden, und es ist

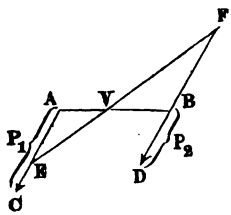
*) Der Einfachheit wegen ist sie hier in die Richtung der Kraft $P_1$ selbst gelegt.

$$X = 300 \,.\, cos\ 0^0 + 500 \,.\, cos\ 160^0 + 241 \,.\, cos\ 314^0 48'$$
$$= 300 - 469{\cdot}8 + 169{\cdot}8 = 0.$$
$$Y = 300 \,.\, sin\ 0^0 + 500 \,.\, sin\ 160^0 + 241 \,.\, sin\ 314^0 48'$$
$$= 0 + 171 - 171 = 0;$$

die Kräfte sind also im Gleichgewicht.

**15.** a. Man verbinde (Fig. 6) die Angriffspunkte $A$ und $B$ der beiden parallelen Kräfte $P_1$ und $P_2$, mache $AE = P_2$ sowie $BF = P_1$ und verbinde die Punkte $E$ und $F$ durch eine gerade Linie, so ist der Durchschnittspunkt $V$ der gesuchte Punkt. Denn aus den ähnlichen Dreiecken $AEV$ und $BEV$ folgt: $AV : BV = AE : BF$, d. h. $= P_2 : P_1$.

Fig. 6.




b. Aehnliches Verfahren; der Mittelpunkt liegt, wenn die Kräfte ungleich sind, in der Verlängerung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte auf der Seite der größeren Kraft. Sind die Kräfte gleich, so haben sie keine Resultirende.

**16.** Zwischen zwei parallelen Kräften $P_1$ und $P_2$, ihrer Resultirenden $P$, sowie der Entfernung $a$ der Angriffspunkte der beiden parallelen Kräfte und den Entfernungen $p_1$ und $p_2$ ihrer Angriffspunkte von ihrem Mittelpunkte hat man die Gleichungen: $P = P_1 + P_2$; $P_1 p_1 = P_2 p_2$; $a = p_1 + p_2$, mittelst welcher, wenn von den sechs Größen drei bekannt sind, die drei anderen gefunden werden können.

Für den vorliegenden Fall findet sich:

$$P = P_1 + P_2 = 12 \text{ Kg}; \quad p_1 = \frac{P_2 a}{P_1 + P_2} = \frac{7 \,.\, 2}{12} = 1^1/_6 \text{ m}.$$

$$p = \frac{P_1 a}{P_1 + P_2} = \frac{5 \,.\, 2}{12} = {}^5/_6 \text{ m}.$$

**17.** $P = 19$ Kg, $p_1 = {}^{14}/_{19}$ m.

**18.** Aus Aufgabe 16 folgt: $a = \dfrac{(P_1 + P_2) p_1}{P_2} = 3^1/_5$ m.

**19.** $9^3/_7$ Decimeter.

**20.** Denkt man sich die Angriffspunkte der Kräfte in die Durchschnittspunkte ihrer Richtungen mit einer auf diese senkrechten Linie versetzt, so folgt aus Aufgabe 16:

$$P_1 = \frac{P p_2}{p_1 + p_2} = \frac{18 \,.\, 9}{14} = 11^4/_7,$$

$$P_2 = \frac{P p_1}{p_1 + p_2} = \frac{18 \,.\, 5}{14} = 6^3/_7.$$

**21.** $P_2 = 5$, $p_2 = 15$.

**22.** Bezeichnen $P_1$, $P_2$ parallele Kräfte, $P$ ihre Resultirende, sowie $p_1$, $p_2$, $p$ die Hebelarme dieser Kräfte in Beziehung auf einen Punkt, eine gerade Linie oder eine Ebene, so ist $Pp = P_1 p_1 + P_2 p_2$, und aus dieser in Verbindung mit $P = P_1 + P_2$ folgt

$p = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2}{P_1 + P_2}$. In der vorliegenden Aufgabe hat man also

$$p = \frac{11 \,.\, 2 + 15 \,.\, 3}{11 + 15} = 2{\cdot}578 \text{ m.}$$

23. $$p = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots}$$

$$= \frac{4 \,.\, 3 + 8 \,.\, 4 + 5 \,.\, 5 + 3 \,.\, 7 + 2 \,.\, 9}{4 + 8 + 5 + 3 + 2} = 4{\cdot}909 \text{ Decimeter.}$$

24. $$p = \frac{4 \,.\, 3 + 8 \,.\, 4 + 5 \,.\, 5 - 3 \,.\, 7 - 2 \,.\, 9}{4 + 8 + 5 + 3 + 2} = 1{\cdot}36 \text{ Decimeter.}$$

25. $$x = \frac{18.25 + 20.39 - 30.32 + 24.16 - 18.13}{18 + 20 - 30 + 24 + 18} = {}^{420}/_{50} = 8{\cdot}4.$$

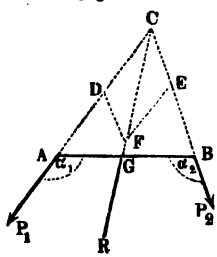
$$y = \frac{18.13 + 20.24 - 30.41 + 24.39 - 18.20}{18 + 20 - 30 + 24 + 18} = {}^{60}/_{50} = 1{\cdot}2.$$

$P = 50.$

26. Er würde im Anfangspunkt der Coordinaten liegen, da in diesem Falle $x = 0$, $y = 0$ sich ergiebt.

27. Man verlängere (Fig. 7) die Richtungen $AP_1$ und $BP_2$ der beiden Kräfte bis zum Schneidepunkt $C$, schneide von da aus die Stücke $CD$ und $CE$ proportional den Kräften $P_1$ und $P_2$ ab und vollende das Parallelogramm $CDFE$, so stellt die Diagonale $CF$ desselben die gesuchte Resultirende dar, deren Angriffspunkt man in jeden beliebigen Punkt ihrer Richtung, z. B. in den Punkt $G$ verlegen kann.

Fig. 7.




Um die Größe und Lage der Resultirenden durch Rechnung zu finden, ergiebt sich in dem Dreieck $ABC$, da in demselben $AB$, sowie die beiden anliegenden Winkel gegeben sind, $AC = 4{\cdot}045$, $BC = 2{\cdot}939$; ferner berechnet sich aus dem Dreieck $CDF$ der Winkel $DCF = 36^0 52'$, sowie der Winkel $FCE = 53^0 8'$ und $R = CF = 30$. Der Angriffspunkt $G$ in der Linie $AB$ findet sich sodann durch die Linie $AG$, die sich aus dem Dreieck $ACG$, worin jetzt $AC$ und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind, $= 2{\cdot}53$ ergiebt, oder aus dem Dreieck $BCG$ durch $BG = 2{\cdot}47$.

28. $R = \sqrt{20^2 + 34^2 + 2 \,.\, 20 \,.\, 34 \cos 70^0} = 44{\cdot}96$ Pfd.

Bezeichnet $\varphi$ den Winkel, den die Mittelkraft $R$ mit $P$ bildet, so ist

$$\sin \varphi = \frac{34 \,.\, \sin 70^0}{44{\cdot}96}, \text{ also } \varphi = 45^0 17',$$

und wenn $a$ den Abstand der Mittelkraftsrichtung vom Punkte $O$ bezeichnet:

$$a' = \frac{20 \,.\, 4 + 34 \,.\, 1}{44{\cdot}96} = 2{\cdot}536 \text{ Fuß.}$$

**29.** Bezeichnet $x$ die Summe der der Axe $Ox$ parallelen Componenten, sowie $Y$ die Summe der darauf senkrechten Componenten, so ist

$$X = 26 \,.\, cos\ 26^0 30' + 22{\cdot}5 \,.\, cos\ 35^0 + 15 \,.\, cos\ 124^0 = 33{\cdot}3,$$
$$Y = 26 \,.\, sin\ 26^0 30' + 22{\cdot}5 \,.\, sin\ 35^0 + 15 \,.\, sin\ 124^0 = 36{\cdot}94,$$

woraus sich die Größe der Resultirenden ergiebt

$$R = \sqrt{33{\cdot}3^2 + 37{\cdot}33^2} = 49{\cdot}73 \text{ Pfd.}$$

sowie $tang\ \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{37{\cdot}33}{33{\cdot}3} = 47^0 58'.$

Der Abstand der Resultirenden vom Punkte $O$ ist:

$$a = \frac{26 \,.\, 6 + 22{\cdot}5 \,.\, 5 - 15 \,.\, 8}{49{\cdot}92} = 2{\cdot}98.$$

---

## Auflösungen zu IV.

---

**1.** Im Halbirungspunkte der Linie.

**2.** Die Halbirungspunkte $D$, $E$ und $F$ (Fig. 8) sind die Schwerpunkte der Dreiecksseiten $a$, $b$ und $c$. Theilt man die Strecke $DE$ so, daß $DG : EG = b : a$, so ist $G$ der Schwerpunkt der beiden den Winkel $C$ einschließenden Seiten $a$ und $b$. Theilt man ferner die Strecke $GF$ so, daß $GS : FS = c : (a + b)$, so ist $S$ der Schwerpunkt des Umfangs des Dreiecks $ABC$. (Man findet auch den Punkt $S$, wenn man zwei Winkel des Dreiecks $DEF$ halbirt; $S$ ist also der Mittelpunkt des in das Dreieck $DEF$ zu beschreibenden Kreises.)

Fig. 8.

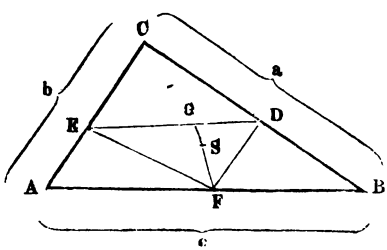
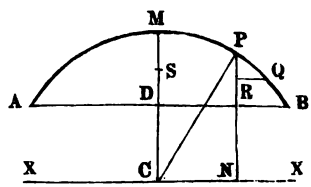



Fig. 9.



3. Im Mittelpunkt der Figur.

4. Ist $M$ (Fig. 9) die Mitte des Bogens $\overset{\frown}{AB} = b$, so liegt der Schwerpunkt $S$ innerhalb des Halbmessers $CM$ in einer Entfernung $CS = x$ vom Mittelpunkte, die sich auf folgende Weise bestimmt. Man denke sich den Bogen in unendlich viele Theile getheilt, und die statischen Momente derselben in Beziehung auf eine durch $C$ gehende, mit $AB$ parallele Axe $XX$ bestimmt. Ist $PQ$ ein solcher unendlich kleiner Theil des Bogens und $PN$ dessen Abstand von $XX$, so ist sein statisches Moment $= PQ \,.\, PN$. Zieht man $PC$, sowie $QR \parallel AB$, so erhält man zwei Dreiecke $PQR$ und $CPN$, aus deren Aehnlichkeit $PQ \,.\, PN = QR \,.\, CP = QR \,.\, r$ folgt, d. h. das statische Moment des Bogenstücks $PQ$ in Beziehung auf die Axe $XX$ ist gleich dem Product aus dem Halbmesser und der Projection des Bogenstücks auf die Sehne $AB$. Dasselbe gilt für jedes andere Bogenstück, so daß also die Summe der statischen Momente aller Bogenstücke gleich ist dem Product aus dem Halbmesser und der Sehne $AB = s$, also $= r \,.\, s$. Ist nun $S$ der Schwerpunkt des Bogens $AB$, d. h. der Mittelpunkt der auf die Massentheile des Bogens wirkenden parallelen Schwerkräfte, und setzt man $CS = x$, so muß $x\,b = r\,s$*), also $x = \frac{r\,s}{b}$ sein, die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Bogens ist also die vierte Proportionale zum Bogen, der zugehörigen Sehne und dem Halbmesser.

In vorliegender Aufgabe ist, da sich die Länge des Kreisbogens $b$ aus den für $r$ und $s$ gegebenen Werthen $= 49{\cdot}85$ cm (der zugehörige Centriwinkel $\beta = 105^0 33' 20''$) berechnet**), $x = \frac{27{\cdot}43}{49{\cdot}85} = 23{\cdot}9$ cm.

5. Halbirt man die Seite $AB$ (Fig. 10) und verbindet den Halbirungspunkt $D$ mit $C$, so ist $CD$ eine Schwerlinie des Dreiecks. Zieht man eine zweite Schwerlinie $AE$, so ist der Durchschnittspunkt $S$ der Schwerpunkt des Dreiecks. (Die dritte Schwerlinie geht gleichfalls durch den Punkt $S$.)

Zieht man $DE$, so ist $DE = \frac{1}{2} AC$, und daraus läßt sich mittelst der

---

*) Richtiger wie in Obigem ausgedrückt, ist das statische Moment der auf das Bogenstück $PQ$ wirkenden Schwerkraft, wenn $m$ die Masse desselben und $g$ die Beschleunigung der Schwerkraft bezeichnet, $= m\,g \,.\, PN$, oder, wenn $m_1$ die Masse der Projection des Bogenstücks, d. h. die Masse des entsprechenden Sehnenstücks $QR$ bezeichnet, $= m_1\,g \,.\, r$, also die Summe aller statischen Momente $= (m_1 + m_1 + m_1 + \ldots)\,gr$. Anderentheils ist das Moment der im Punkte $S$ angreifenden Resultirenden aller auf die einzelnen Bogenstücke wirkenden Kräfte $= (m + m + m + \ldots)\,gx$, folglich $(m_1 + m_1 + m_1 + \ldots)\,gr = (m + m + m + \ldots)\,gx$, woraus wegen $\frac{m_1 + m_1 + m_1 + \ldots}{m + m + m + \ldots} = \frac{x}{r}$ d. h. $\frac{s}{b} = \frac{x}{r}$, also die obige Gleichung folgt.

**) Aus $r \sin \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} s$ findet sich $\beta$ und daraus $b = \frac{r\beta}{\varrho}$, wo $\varrho = \frac{180^0}{\pi}$.

ähnlichen Dreiecke $DSE$ und $CSA$ darthun, daß $DS = \frac{1}{2}CS = \frac{1}{3}DC$ oder $CS = \frac{2}{3}CD$.

6. Der Schwerpunkt $S$ liegt (Fig. 11) im Durchschnittspunkt der Schwerelinie $EF$ mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte $S_1$ und $S_2$ der beiden

Fig. 10.

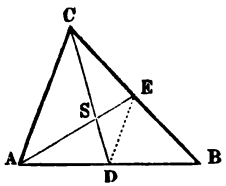
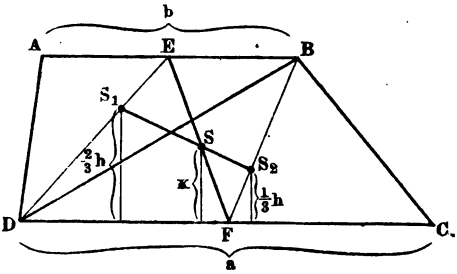



Fig. 11.




Dreiecke $ABD$ und $BCD$. Seine Entfernung $xc$ von der größeren $a$ der beiden parallelen Seiten bestimmt sich, wenn $b$ die kleinere und $h$ die Höhe des Trapezes bezeichnet, aus: $\frac{(a+b)h}{2} \cdot x = \frac{bh}{2} \cdot \frac{2}{3}h + \frac{ah}{2} \cdot \frac{1}{3}h$, nämlich $x = \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{h}{3}$.

7. Verbindet man die Schwerpunkte der beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch die eine der beiden Diagonalen getheilt wird, und ebenso die Schwerpunkte der beiden durch Ziehen der anderen Diagonale entstehenden Dreiecke, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Verbindungslinien der Schwerpunkt des Vierecks.

8. Man zerlege das Vieleck in Dreiecke, bestimme nach Aufgabe 5 die Schwerpunkte derselben, denke sich diese als die Angriffspunkte paralleler Kräfte, deren relative Größen durch die Flächeninhalte der Dreiecke ausgedrückt werden können, so ist der Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte der gesuchte Schwerpunkt.

9. Die Schwerelinie des Kreisausschnitts $ABC$ (Fig. 12 a. f. S.) fällt mit der Halbirungslinie des Winkels $ABC$ zusammen. Denkt man sich den Ausschnitt durch Ziehen von Radien in unendlich viele Theile getheilt, so kann man diese als Dreiecke betrachten. Die Schwerpunkte aller dieser Dreiecke liegen (Aufgabe 5) in einem Kreisbogen, dessen Halbmesser $CA_1 = \frac{2}{3}CA = \frac{2}{3}r$, und dessen zugehörige Sehne $A_1B_1 = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}s$ ist; zufolge Aufgabe 4. ist also die Entfernung des Schwerpunktes $S$ vom Mittelpunkt

$C = \dfrac{\frac{2}{3}r \cdot \frac{2}{3}s}{\frac{2}{3}b} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{rs}{b}$, wenn nämlich $b$ den aus den Werthen von $r$ und $s$ berechneten Bogen $AB$ bezeichnet. In vorliegender Aufgabe berechnet sich $b = 47{\cdot}3$ cm, also ist $x = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{36{\cdot}44}{47{\cdot}3} = 22{\cdot}3$ cm.

Fig. 12.

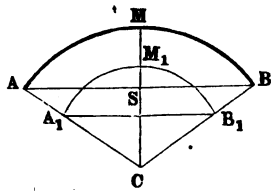
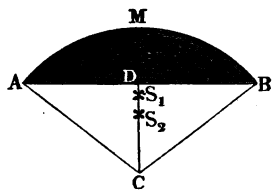



Fig. 13.




**10.** Sind (Fig. 13) $S$, $S_1$, $S_2$ die Schwerpunkte und bezeichnen $F$, $F_1$, $F_2$ die Flächeninhalte beziehungsweise des Kreisabschnitts $AMB$, des Kreisausschnitts $AMBC$ und des Dreiecks $ABC$, so ist $F_1 \,.\, CS_1 = F \,.\, CS + F_2 \,.\, CS_2$ oder $F \,.\, CS = F_1 \,.\, CS_1 - F_2 \,.\, CS_2$.

Nun ist $F_1 = \dfrac{1}{2} rb$, wenn $b$ den Bogen $AB$ bezeichnet;

$$F_2 = \frac{1}{2} s \sqrt{r_2 - \frac{1}{4} s^2};$$

$$CS_1 = \frac{2}{3} \frac{rs}{b} \text{ (Aufg. 9)};$$

$$CS_2 = \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} \text{ (Aufg. 5)};$$

folglich $F \,.\, CS = \dfrac{1}{2} rb \cdot \dfrac{2}{3} \dfrac{rs}{b} - \dfrac{1}{2} s \sqrt{r_2 - \dfrac{1}{4} s^2} \cdot \dfrac{2}{3} \sqrt{r^2 - \dfrac{1}{4} s^2}$

$$= \frac{1}{12} s^3,$$

also $CS = \dfrac{s^3}{12F}$, worin $F = F_1 - F_2 = \dfrac{1}{2} rb - \dfrac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \dfrac{1}{4} s^2}$.

In vorliegender Aufgabe berechnet sich der Kreisabschnitt $F = 224{\cdot}5$ □cm, also $x = \dfrac{44^3}{12 \,.\, 224{\cdot}5} = 31{\cdot}6$ cm.

**11.** Aus Aufgabe 9 folgt $x = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{r \,.\, 2r}{b} = \dfrac{4r}{3\pi} = 0{\cdot}424 \,.\, r = 4{\cdot}664$ cm vom Mittelpunkt in der Schwerelinie.

**12.** Denkt man sich den Kegelmantel durch gerade Linien von der Spitze nach der Peripherie des Grundkreises in unendlich viele gleiche Theile getheilt, so kann man diese als Dreiecke betrachten. Die Schwerpunkte dieser Dreiecke

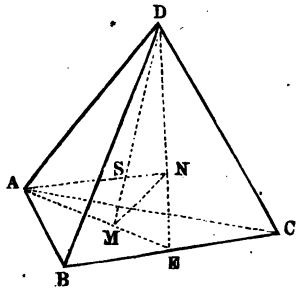
liegen in der Peripherie eines Kreises, dessen Ebene um $^2/_3$ der Höhe des Kegels von seiner Spitze entfernt ist; der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schwerpunkt des Mantels.

13. Denkt man sich die Kugelzone durch Ebenen, die dem Grundkreis parallel sind, in unendlich viele Theile von gleicher Höhe getheilt, so haben alle diese Elementarzonen gleichen Flächeninhalt und ihre Schwerpunkte liegen in der Senkrechten, die im Mittelpunkt des Grundkreises auf diesem senkrecht steht, d. h. in der Höhe der Kugelzone. Da also jeder dieser Schwerpunkte einer gleich großen Masse entspricht, so ist der Halbirungspunkt der Höhe der Schwerpunkt der Kugelzone.

Dasselbe gilt von der Kugelschale oder Calotte.

14. In Fig. 14 sei $M$ der nach Aufgabe 5 bestimmte Schwerpunkt des Dreiecks $ABC$, sowie $N$ der Schwerpunkt des Dreiecks $DBC$. Denkt man sich die Pyramide durch Ebenen parallel mit der Grundfläche $ABC$ geschnitten, so entstehen Dreiecke, von denen sich geometrisch nachweisen läßt, daß sie dem $\triangle ABC$ ähnlich sind und daß ihre Schwerpunkte sämmtlich in der Linie $DM$ liegen; also muß auch der Schwerpunkt der Pyramide in $DM$ liegen. Ebenso läßt sich zeigen, daß dieser Schwerpunkt auch in der Linie $AN$ liegen muß; folglich muß er in dem Durchschnittspunkt $S$ der beiden in der Ebene des $\triangle ADE$ befindlichen Schwerelinien $DM$ und $AN$ liegen.

Fig. 14.



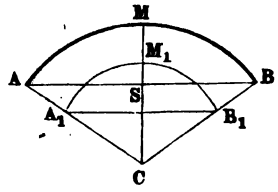

Zieht man $MN$, so ist, weil $ME = \frac{1}{3} AE$ und $NE = \frac{1}{3} DE$, $MN = AD$, also $MN = \frac{1}{3} AD$ und $\triangle MNS \sim \triangle ASD$, folglich $MS = \frac{1}{3} DS = \frac{1}{4} MD$. Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt also in der Geraden, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet, und zwar um $^3/_4$ dieser Geraden von der Spitze entfernt.

15. Denkt man sich die vielseitige Pyramide mittelst Ebenen, welche durch die Spitze gehen, in dreiseitige Pyramiden zerlegt, so liegen nach voriger Aufgabe die Schwerpunkte derselben in einer Ebene, die um $^1/_4$ der Höhe von der Grundfläche entfernt ist. In dieser Ebene liegt also auch der Schwerpunkt der vielseitigen Pyramide, und da derselbe auch in der Verbindungslinie des Schwerpunktes der Grundfläche mit der gegenüberliegenden Spitze liegen muß, was sich wie das Gleiche in voriger Aufgabe beweisen läßt, so ergiebt sich für die Bestimmung des Schwerpunktes der vielseitigen Pyramide die nämliche Regel wie für die der dreiseitigen Pyramide in voriger Aufgabe.

Für die Bestimmung des Schwerpunktes eines Kegels gilt dieselbe Regel.

**16.** Man kann sich den Kugelausschnitt $AMBC$ (Fig. 15, die einen durch den Mittelpunkt und die Schwerelinie gehenden Durchschnitt desselben darstellt) als eine Summe von unendlich vielen Pyramiden denken, deren gemeinschaftliche Spitze der Kugelmittelpunkt $C$ ist und deren Grundflächen die Kugelmütze $AMB$ bilden. Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden stehen nach voriger Aufgabe um $^3/_4$ des Kugelhalbmessers von $C$ ab, liegen also in einer zweiten Kugelmütze $A_1M_1B_1$ vom Halbmesser

Fig. 15.



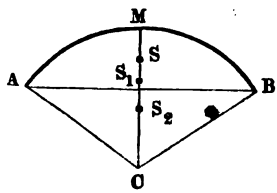

$CA_1 = \frac{3}{4}\,CA = \frac{3}{4}\,r$, deren Schwerpunkt folglich der Schwerpunkt des Kugelausschnittes ist. Ist $S$ der Schwerpunkt, so ist, wenn $h$ die Höhe der äußeren Kugelmütze $AMB$, also $\frac{3}{4}\,h$ die Höhe der Kugelmütze $A_1M_1B_1$ bezeichnet,

$$M_1S = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\,h\right) \text{ (Aufg. 13), folglich } CS = CM_1 - M_1S = \frac{3}{4}\,r$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\,h\right) = \frac{3}{4}\left(r - \frac{1}{2}\,h\right) = \frac{3}{8}\,(2r - h).$$

**17.** Sind (Fig. 16) $S$, $S_1$ und $S_2$ die Schwerpunkte beziehungsweise des Kugelabschnitts $AMB$, des Kugelausschnitts $AMBC$ und des Kegels $ABC$, und bezeichnen $K$, $K_1$ und $K_2$ deren körperliche Inhalte, so muß $K_1 \cdot CS_1 = K \cdot CS + K_2 \cdot CS_2$, oder $K \cdot CS = K_1 \cdot CS_1 - K_2 \cdot CS_2$ sein.

Fig. 16.




Nun ist aber

$$K_1 = \frac{2}{3}\,r^2\pi h;$$

$$K_2 = \frac{1}{3}\,(2r - h)\,h\pi\,(r - h);$$

$CS_1 = \frac{3}{8}\,(2r - h)$ (Aufg. 16); $CS_2 = \frac{3}{4}\,(r - h)$ (Aufg. 15);

also $K.\,CS = \frac{2}{3}\,r^2\pi h \cdot \frac{3}{8}\,(2r - h) - \frac{1}{3}\,(2r - h)\,h\pi\,(r - h) \cdot \frac{3}{4}\,(r - h) = \frac{1}{4}\,\pi h^2\,(2r - h)^2$,

folglich, da $K = \frac{1}{3}\,\pi h^2\,(3r - h)$ ist,

$$CS = \frac{\frac{1}{4}\,\pi h^2\,(2r - h)^2}{\frac{1}{3}\,\pi h^2\,(3r - h)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

18. Sowohl aus Aufgabe 16, als aus 17 folgt $CS = \frac{3}{8} r$.

19. Das Gewicht $Q$ des Körpers ist $l\,b\,h\,s = 288$ Kg. Liegt der Körper auf der Seitenfläche $l\,b$, so ergiebt sich die Stabilität bezüglich der Umdrehung um die Kante $l$, d. h. die äußerste Kraft, welche parallel mit der Kante $b$ auf den Schwerpunkt wirken kann, ohne daß der Körper umgeworfen wird, aus der Gleichung $P \cdot \frac{h}{2} = Q \cdot \frac{b}{2}$, also $P = \frac{Q\,b}{h} = \frac{288 \cdot 8}{5} = 460 \cdot 8$ Kg.

Liegt der Körper auf der Seitenfläche $b\,h$, so ergiebt sich die Stabilität bezüglich der Kante $b$ .... $= \frac{Q\,h}{l} = 120$ Kg.

---

## Auflösungen zu V.

---

1. Am zweiten Arme müssen $\frac{0 \cdot 3 \,.\, 30}{0 \cdot 5} = 18$ Kg hängen und der Druck auf den Stützpunkt ist also $= 30 + 18 = 48$ Kg.

2. $\frac{3 \,.\, 500}{800} = 1\frac{7}{8}$ m.

3. $P$ muß etwas größer sein als 400 Pfund; während aber die Kraft 5 mal so groß ist als die Last, ist der Weg der Last 5 mal so groß als der der Kraft.

4. Bezeichnet man die gesuchte Entfernung mit $x$, so ist, je nachdem man den Stützpunkt oder einen der Angriffspunkte der Kräfte als Drehpunkt (oder Mittelpunkt der Momente) nimmt: 1) $P\,(a - x) = Q \,.\, x$, oder 2) $P \,.\, a = (P + Q)\,x$, oder 3) $Q \,.\, a = (P + Q) \,.\, (a - x)$, und aus jeder dieser Gleichungen ergiebt sich $x = \frac{P \,.\, a}{P + Q}$.

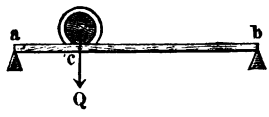
5. Bezeichnen wir das Gewicht am Hebelarm $a$ mit $x$, so haben wir, je nachdem wir den Stützpunkt oder die Aufhängepunkte der Gewichte als Mittelpunkt der Momente annehmen, entweder

1) $x \,.\, a = (Q - x) \,.\, b$, oder 2) $Q \,.\, b = x\,(a + b)$, oder 3) $Q \,.\, a = (Q - x) \,.\, (a + b)$, und aus jeder dieser Gleichungen folgt

$$x = \frac{Q \,.\, b}{a + b}, \quad Q - x = \frac{Q \,.\, a}{a + b}.$$

6. Nimmt man (Fig. 17) die Momente von $b$ aus, so hat man, wenn der Druck in $a$ mit $D'$ bezeichnet wird,

Fig. 17.




$$Q \,.\, bc = D' \,.\, ab, \text{ also } D' = \frac{Q \,.\, bc}{ab}.$$

Nimmt man dagegen die Momente von $a$ aus und bezeichnet den Druck in $b$ mit $D''$, so hat man

$$Q \,.\, ac = D'' \,.\, ab, \text{ also } D'' = \frac{Q \,.\, ac}{ab}.$$

7. Die Last muß vom stärkeren Träger $3^{11}/_{13}$ Fuß, vom schwächeren $5^{2}/_{13}$ Fuß entfernt sein, und in diesem Fall hat jener $61^{7}/_{13}$ Pfd., dieser $38^{6}/_{13}$ Pfd. zu tragen.

8. Aus $99 : 3 \,.\, \sin 30^0 = 100 \cdot \frac{5}{3} \cdot \sin B$ folgt $\sin B = 0{\cdot}891 = \sin 63^0$, also $B = 63^0$.

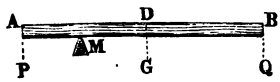
9. Setzen wir die gesuchte Entfernung $= x$, so haben wir, die Momente vom Endpunkt genommen,

$$(3 + 5 + 7 + 9)\, x = 3 \,.\, 0 + 5 \,.\, 1 + 7 \,.\, 2 + 9 \,.\, 3,$$

$$\text{also } x = \frac{5 + 7 \,.\, 2 + 9 \,.\, 3}{3 + 5 + 7 + 9} = \frac{23}{12} \text{ Fuß} = 23 \text{ Zoll}.$$

10. Nimmt man (Fig. 18) die Momente vom Punkt $M$ aus, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung unmittelbar $P \,.\, AM = Q \,.\, MB + G \,.\, MD$. Nimmt man dagegen die Momente von $A$ aus, so erhält man $(P + Q + G).AM = G.AD + Q.AB$, welche Gleichung in die vorige übergeht. Der Druck ist $= P + Q + G$.

Fig. 18.



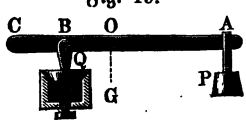

11. Aus $30 \cdot \frac{1}{3} = 2 \,.\, {}^1/_6 + x \,.\, \frac{2}{3}$ folgt $x = 14^1/_2$ Kg.

12. Bezeichnet $x$ die Entfernung des Unterstützungspunktes vom Aufhängepunkt des Gewichts von 16 Pfd., so folgt aus $16 \,.\, x = (6 - x) \,.\, 8 + (3 - x) \,.\, 18$, $x = 2{\cdot}4$ Fuß.

13. Aus $P \,.\, 1 = 50 \,.\, 0{\cdot}3 + 1^1/_2 \,.\, {}^1/_2$ folgt $P = 15^3/_4$ Pfd.

14. Bezeichnet man (Fig. 19) den Druck auf das Ventil mit $Q$, so hat man $Q \,.\, 2 = 10 \,.\, 18 + 2 \,.\, 8$, also $Q = 98$ Pfd.

Fig. 19.




Gewöhnlich reducirt man, der einfacheren Berechnung des Dampfdruckes wegen, das Gewicht des Hebels auf den Endpunkt $A$ desselben und addirt dann dies reducirte Gewicht zu dem von $P$, so daß man dann den Hebel als mathematischen betrachten kann. Das vom Hebelarm $CO$ auf den Hebelarm $CA$ reducirte Gewicht $G$ wird aber $= G \,.\, \frac{CO}{CA}$, also in unserem Beispiel $x = 2 \,.\, {}^4/_9 = {}^8/_9$ Pfd.; man kann also, wenn man für $P = 10$ Pfd. jetzt $10^8/_9$ Pfd. in Rechnung bringt, den Hebel $CA$

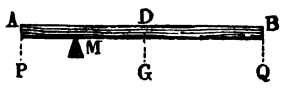
als mathematischen Hebel betrachten und statt der obigen Gleichung $Q \cdot 2 = 10^8/_9 \cdot 18$ setzen, woraus wieder $Q = 98$ Pfd. folgt.

15. Aus $P \cdot 3 = 65 \cdot 2 + 15 \cdot 0{\cdot}5$ folgt $P = 45^5/_6$ Pfd., und daraus $D = \sqrt{(Q + G)^2 + P^2} = \sqrt{80^2 + 45^5/_6{}^2} = \sqrt{8501} = 92$ Pfd.

16. Aus $V \cdot 13 = 400 \cdot 10 + 150 \cdot 6 + 200 \cdot 4 - 300 \cdot 3$ folgt $V = 369^3/_{13}$, also $W = 400 + 150 + 200 + 400 - 369^3/_{13} = 680^{10}/_{13}$, welcher Werth sich aber auch aus der Momentengleichung $W \cdot 13 = 400 \cdot 13 + 150 \cdot 7 + 200 \cdot 9 + 300 \cdot 16$ ergiebt.

17. Man bestimmt zuerst (Fig. 20) den Schwerpunkt $D$ des Hebels, hängt dann an das eine Ende $A$ desselben das bekannte Gewicht $P$ und bringt ihn nun ins Gleichgewicht, indem man ihn in $M$ unterstützt, so ist das Gewicht $G$ desselben $= \frac{AM}{MD} \cdot P$.

Fig. 20.




18. Im Falle des Gleichgewichts hat man vor dem Einsenken des Körpers von unbekanntem Gewicht $Q$ ins Wasser $Pb = Qa$, woraus man $Q$ bestimmen könnte, was aber die Aufgabe nicht fordert.

Nach dem Einsenken in Wasser hat man, wenn $p$ das Gewicht des verdrängten Wassers bezeichnet,

$$Pc = (Q - p)\, a.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweite, so erhält man $\frac{b}{c} = \frac{Q}{Q - p}$ und daraus $\frac{Q}{p}$ d. h. $s = \frac{b}{b - c}$.

19. Bezeichnet $p$ den Gewichtsverlust des Glaskörpers im Wasser, $p_1$ den in der anderen Flüssigkeit und sind bezüglich $c$ und $d$ die Hebelarme, an welchen das Laufgewicht behufs Herstellung des Gleichgewichts wirken muß, so erhält man wie in 18 die Gleichungen $\frac{Q}{p} = \frac{b}{b - c}$ und $\frac{Q}{p_1} = \frac{b}{b - d}$ und aus diesen durch Division $\frac{p_1}{p}$ d. h. $s_1 = \frac{b - d}{b - c}$.

20. Eine gute Krämerwage muß

1) richtig sein, d. h. bei gleicher Belastung der beiden Schalen muß Gleichgewicht bestehen und dabei der Wagebalken eine horizontale Lage annehmen. Das Erstere wird durch gleiche Länge, überhaupt genaue Symmetrie der beiden Arme des Wagebalkens erreicht, das Letztere dadurch, daß der Schwerpunkt des Wagebalkens unter den Drehpunkt zu liegen kommt.

2) Sie muß empfindlich sein, d. h. die Lage des Wagebalkens im Zustande des Gleichgewichts muß sich sofort merklich ändern, wenn ein kleines Uebergewicht in die eine Schale gelegt wird. Zu diesem Zwecke muß sich der Drehpunkt des Wagebalkens mit den Aufhängepunkten der Wagschalen in einer geraden Linie befinden, der Schwerpunkt des Wagebalkens darf sehr

wenig unter dem Drehpunkt desselben liegen, die Arme des Wagebalkens müssen möglichst lang, sein Gewicht aber darf nur gering sein.

3) Sie darf nicht träge sein, d. h. ihr Wagebalken muß im Zustande des Gleichgewichts seine horizontale Lage schnell wieder einnehmen, wenn man sie aus derselben gebracht hat. Dies wird durch die möglichste Verminderung der Zapfenreibung erreicht, weshalb man den Zapfen aus Stahl in Form einer Schneide verfertigt und auf einer Stahlplatte oder auf einem Edelstein spielen läßt.

21. $\frac{n}{2m \,.\, 1000 \,.\, 1000}$, da man die Empfindlichkeit einer Wage durch Angabe eines Bruchs ausdrückt, der das geringste noch einen merklichen Ausschlag gebende Gewicht zum Zähler und das Gewicht der größten noch zulässigen Belastung zum Nenner hat.

22. I. Man bringe den Körper $K$ durch Tarirgewichte genau ins Gleichgewicht, nehme ihn dann aus der Schale und ersetze ihn durch so viel Gewichte, daß wieder Gleichgewicht entsteht, so geben offenbar die letzteren Gewichte das Gewicht des Körpers an.

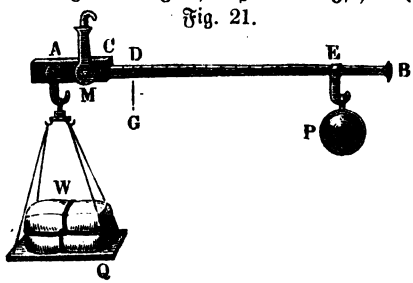
II. Man bringt den Körper $K$ erst an dem einen Hebelarm der Wage, dessen Länge wir mit $a$ bezeichnen wollen, ins Gleichgewicht mit einem am anderen Hebelarm von der Länge $= b$ befindlichen Gewicht $= P_1$, sodann bringe man, nach Wegnahme von $P_1$, den Körper $K$ an den anderen Hebelarm und stelle mit Hülfe eines Gewichtes $= P_2$ das Gleichgewicht wieder her. Bezeichnet man das (richtige) Gewicht des Körpers $K$ mit $Q$, so hat man

aus der ersten Wägung $P_1 : Q = a : b$
aus der zweiten „ $Q : P_2 = a : b$
folglich $P_1 : Q = Q : P_2$
also $Q = \sqrt{P_1 \,.\, P_2}$.

23. $\sqrt{2 \,.\, 2^1/_4} = 2{\cdot}121$ Pfd.

24. Für den Fall, daß die Wagschale (Fig. 21) unbelastet ist, und das Laufgewicht in $C$ sich befindet, hat man $Q \,.\, MA = P \,.\, MC + G \,.\, MD$.

Fig. 21.




Legt man das Gewicht $W$ einer Waare auf die Wagschale und muß man deshalb zur Herstellung des Gleichgewichtes das Laufgewicht nach $E$ schieben, so ist jetzt

$$(Q + W) \,.\, MA = P\,(MC + CE) + G \,.\, MD.$$

Zieht man von dieser die vorige Gleichung ab, so erhält man

$$W \,.\, MA = P \,.\, CE \text{ oder } \frac{W}{P} = \frac{CE}{MA}.$$

Im Zustande des Gleichgewichtes ist also das Gewicht des Läufers so vielmal in dem Gewichte der Waare enthalten, wie die Strecke $MA$ in der Strecke $CE$.

25. Aus der in voriger Aufgabe gefundenen Bedingungsgleichung folgen die beiden nachstehenden Eintheilungsmethoden:

I. Man bestimme den Punkt $C$ (Fig. 21), in welchem das Laufgewicht der (unbelasteten) Wagschale das Gleichgewicht hält, theile den kürzeren Hebelarm $MA$ in eben so viele gleiche Theile, als das Laufgewicht Pfunde enthält, und trage diese Theile von $C$ aus so oft als möglich auf $CB$ ab.

II. Nach Bestimmung des Punktes $C$, wie bei voriger Methode, bringe man das Laufgewicht an den äußersten Punkt $B$ des längeren Hebelarmes und stelle durch Auflegung einer Last, deren Gewicht $W_n$ man kennt, auf die Wagschale das Gleichgewicht her. So vielmal nun $W_n$ Pfunde enthält, in so viele gleiche Theile hat man die Strecke $CB$ zu theilen.

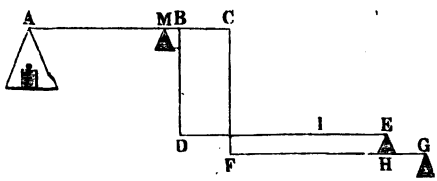
26. a) Die im Vorhergehenden näher betrachtete Schnellwage mit constantem Gewicht an veränderlichem Hebelarm (Schnellwage mit Laufgewicht);

b) die mit veränderlichem Gewicht an constantem Hebelarm (Schnellwage mit verjüngtem Gewicht, gewöhnlich Decimalwage);

c) die mit constantem Gewicht bei veränderlichem Stützpunkt des Wagebalkens (Schnellwage mit festem Gewicht oder dänische Schnellwage).

27. Es sei $Q$ das Gewicht der auf einer beliebigen Stelle $I$ der Brücke $DE$ (Fig. 22) liegenden Last und $Q_1$ und $Q_2$ seien die Drücke, welche sie bezüglich auf die Punkte $D$ und $E$ ausübt.

Fig. 22.




Das Moment des auf $D$, also auch auf die Punkte $B$ wirkenden Drucks $Q_1$ in Beziehung auf den Drehpunkt $M$ ist

$$Q_1 \,.\, MB.$$

Der in $E$ auf den Hebel $FG$ wirkende Druck $Q_2$ zerlegt sich in zwei auf die Punkte $G$ und $F$ wirkenden Drücke, wovon der erstere durch den Widerstand des festen Drehpunktes $G$ aufgehoben wird, während der auf $F$ wirkende $= Q_2 \cdot \frac{GH}{GF}$ ist. Dieser letztere Druck wirkt am Hebel $MC$, sein Moment in Beziehung auf den Drehpunkt $M$ ist also

$$Q_2 \cdot \frac{GH}{GF} \cdot MC.$$

Wenn nun die beiden an $B$ und $C$ angreifenden Drücke $Q_1$ und $Q_2$ gerade so wirken sollen, als ob das auf der Brücke liegende Gewicht $Q$ am Punkte $B$ wirkte, so muß

$$Q_1 \,.\, MB + Q_2 \cdot \frac{GH}{GF} \cdot MC = Q \,.\, MB$$

$$\text{d. h.} = (Q_1 + Q_2) \,.\, MB$$

sein, woraus die gesuchte Bedingungsgleichung nämlich $\frac{GH}{GF} = \frac{MB}{MC}$ folgt.

Wenn also $MC$ z. B. 4mal so groß ist als $MB$, so muß auch $GF$ 4mal so groß sein als $GH$.

28. Weil in der Regel der Hebelarm $MA$ 10mal so groß ist als $MB$, also die Lasten mit 10mal geringeren Gewichten gewogen werden können.

29. $P = \frac{200 \,.\, 0{\cdot}12}{0{\cdot}8} = 30$ Kg.

30. 8 Decimeter.

31. Aus $80 : 320 = 5 : x$ folgt $x = 30$ Zoll.

32. Aus $Q : 30 = (120 \,.\, 15) : (10 \,.\, 4^1/_2)$ folgt $Q = 1200$ Pfd.

33. $P = \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2} \cdot Q = \frac{5 \,.\, 6}{30 \,.\, 40} \cdot 2000 = 50$ Kg.

34. Aus $60 : x = (3 \,.\, 4 \,.\, 6) : (2 \,.\, 12 \,.\, 3 \,.\, 12 \,.\, 4 \,.\, 12)$ folgt $x = 34560$ Pfd.

35. Nahe $51^1/_2$ Pfd.

36. Aus $\frac{Q}{P} = \frac{7200}{20} = \frac{8 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 10}{1 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 5}$ oder auch $= \frac{3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}{1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1}$ u. s. w. folgt, daß, wenn die Räder die Halbmesser 8, 9, 10, 10 erhalten, die Wellen die Halbmesser 1, 2, 2, 5 erhalten müssen, oder wenn 3, 4, 5, 6 die Halbmesser der Räder sind, jede Welle einen Halbmesser $= 1$ u. s. w.

37. Bezeichnen $n$ und $N$ die betreffenden Umdrehungszahlen, so hat man $n : N = (7 \,.\, 11) : (21 \,.\, 55) = 1 : 15$.

38. $\frac{8}{3} \cdot \frac{9}{1} = 24$.

39. Bezeichnet

$n_1$ die Anzahl der Zähne des ersten Getriebes,

$n_2$ „ „ „ „ „ zweiten „

$N_1$ „ „ „ „ „ Rades, in welches das erste Getriebe eingreift,

$N_2$ „ „ „ „ „ „ in welches das zweite Getriebe eingreift, so hat man $\frac{90}{24} = \frac{N_1 \,.\, N_2}{n_1 \,.\, n_2}$, man braucht also 90 und 24 nur je in zwei Factoren zu zerlegen und hat dann z. B., wenn man für $N_1$ und $N_2$ die Zahlen 9 und 10 nimmt, für $n_1$ und $n_2$ die Zahlen 4 und 6 oder 3 und 8 zu nehmen.

40. $\frac{160 + 10}{2} = 85$ Kg.

41. $\frac{160 + 10}{2 \,.\, \cos 30^0} = \frac{170}{2 \,.\, 0{\cdot}866} =$ nahe $98{\cdot}15$ Kg

42. $P = \frac{Q}{2^n} = 39{\cdot}06$ Kg; die Kraft muß aber einen $2^8 = 256$mal größeren Weg zurücklegen als die Last.

43. $P = \frac{1}{2^n}[Q + (2^n - 1)\,G] = \frac{Q - G}{2^n} + G = 49$ Kg.

44. $Q = 2^n \,.\, (P - G) + G = 396$ Pfd.

45. $n = \frac{log\,(Q - G) - log\,(P - G)}{log\ 2} = 3.$

46. $P = \frac{600}{2\,.\,4} = 75$ Pfd.; der Weg der Kraft ist aber 8mal so groß als der der Last.

47. a) $P = \frac{Q + G}{2n}$. b) $P = \frac{Q + G}{2n + 1}$.

48. a) $P = 152$ Pfd. b) $P = 135^1/_4$ Pfd.

49. $Q = m \,.\, P - G = 536$ Pfd.

50. a) $P = Q \cdot \frac{h}{l} = 300$ Kg, $D = Q \cdot \frac{b}{l} = 400$ Kg.

b) $P = Q \cdot \frac{h}{b} = 375$ Kg, $D = Q \cdot \frac{l}{b} = 625$ Kg.

51. a) $P = 460$ Kg, $C = 300$ Kg.
b) $P = 858^2/_3$ Kg, $D = 1045^1/_3$ Kg.

52. a) $P = Q\ sin\ A = 200\ .\ sin\ 30^0 = 100$ Kg.
$D = Q\ cos\ A = 200\ .\ cos\ 30^0 = 173{\cdot}2$ Kg.
b) $P = Q\ 200\ .\ sin\ 19^1/_2{}^0 = 66{\cdot}76$ Kg.
$D = 200\ .\ cos\ 19^1/_2{}^0 = 188{\cdot}55$ Kg.
c) $P = 50{\cdot}08$ Kg, $D = 193{\cdot}63$ Kg.
d) $P = 141{\cdot}42$ Kg, $D = 141{\cdot}42$ Kg.
e) $P = 173{\cdot}2$ Kg, $D = 100$ Kg.

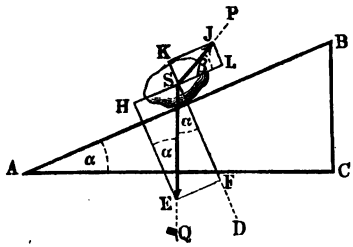
53. a) $P = Q\ tang\ A = 200\ .\ tang\ 30^0 = 115{\cdot}47$ Kg.
$D = \frac{Q}{cos\ A} = \frac{200}{cos\ 30^0} = 230{\cdot}95$ Kg.
b) $P = 200\ .\ tang\ 19^1/_2{}^0 = 70{\cdot}82$ Kg.
$D = \frac{200}{cos\ 19^1/_2{}^0} = 212{\cdot}17$ Kg.
c) $P = 51{\cdot}72$ Kg, $D = 206{\cdot}58$ Kg.
d) $P = 200$ Kg, $D = 282{\cdot}84$ Kg.
e) $P = 346{\cdot}41$ Kg, $D = 400$ Kg.

54. $P = 13 \cdot \frac{1}{300} = 0{\cdot}0433$ Cntr.

55. Zerlegt man (Fig. 23) das durch $SE$ dargestellte Gewicht $Q$ in die beiden Seitenkräfte $SF = Q\ cos\ \alpha$ und $SH = Q\ sin\ \alpha$, wovon die erstere auf der schiefen Ebene senkrecht steht und durch deren Widerstand aufgehoben

wird, die andere ihr parallel ist, sowie ferner die durch $SI$ dargestellte Kraft in ähnlicher Weise in die Componenten $SK = P \sin \beta$ und $SL = P \cos \beta$, so ergiebt sich, daß im Falle des Gleichgewichts $SL = SH$ oder $P \cos \beta = Q \sin \alpha$, also

Fig. 23.




I. $P = Q \dfrac{\sin \alpha}{\cos \beta} = 391{\cdot}622$ Kg

sein muß, $D$ aber $= SF - SK = Q \cos \alpha - P \sin \beta$, oder für $P$ seinen Werth aus I. gesetzt,

$= Q \dfrac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta}$, also

II. $D = Q \dfrac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta} = 148{\cdot}275$ Kg.

**56.** a) $\beta = 0$ gesetzt wird $P = Q \sin \alpha = 300$ Kg; $D = Q \cos \alpha = 400$ Kg.

b) $\beta = -\alpha$ gesetzt wird $P = Q \dfrac{\sin \alpha}{\cos (-\alpha)} = Q \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = Q \operatorname{tang} \alpha = 375$ Kg.

$$D = \frac{Q}{\cos \alpha} = 625 \text{ Kg.}$$

c) Für $\beta$ negativ und zwar $= -, 40^0$ wird $P = Q \dfrac{\sin \alpha}{\cos (-\beta)} = Q \dfrac{\sin \alpha}{\cos \beta} = 391{\cdot}622$ Kg.

$$D = Q \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \beta} = 500 \cdot \frac{\cos (-3^0 1' 50'')}{\cos 40^0} = 651{\cdot}73 \text{ Kg.}$$

Die Endwerthe in *a*) und *b*) sind die nämlichen wie die in Aufg. 50 gefundenen. Warum?

**57.** $P : 60 = 6 : 24$, also $P = 15$ Kg.

**58.** Da die Höhe des Keils $= \sqrt{24^2 - 3^2} = 23{\cdot}7118$ cm ist, so hat man $P_1 : 60 = 6 : 23{\cdot}7118$, also $P_1 = 15{\cdot}1186$ Kg.

**59.** a) Aus $P : Q = h : 2 r \pi$ (vergl. 50, b) folgt $P = Q \dfrac{h}{2 r \pi} = 3{\cdot}183$ Kg.

b) Wegen $P_1 r_1 = P r$ erhält man aus a) $P_1 = Q \dfrac{h}{2 r_1 \pi} = 0{\cdot}796$ Kg.

**60.** Bezeichnet $x$ die Kraft, welche von der Schraube auf die Zähne des Rades ausgeübt wird, so hat man

$P : x = h : 2 r \pi$ nach voriger Aufgabe
$P : Q = r_2 : r_1$

folglich $P : Q = (h r_2) : (2 r r_1 \pi) = 1 : 188{\cdot}4$.

# Auflösungen zu VI.

1. a) $v = 9{\cdot}81 \,.\, \sin 30^0 \,.\, 8 = 9{\cdot}81 \,.\, 0{\cdot}5 \,.\, 8 = 39{\cdot}24$ m; $s = {}^1/_2 \cdot 9{\cdot}81 \sin 30^0 . 64 = 156{\cdot}96$ m.

   b) $v = \sqrt{2 \,.\, 9{\cdot}81 \,.\, \sin 15^0 \,.\, 10} = 7{\cdot}126$ m.

2. a) $t = \sqrt{\dfrac{2 \,.\, 10}{9{\cdot}81 \,.\, {}^1/_{10}}} = 4{\cdot}52$ Secunden.

   $v = \sqrt{2 \,.\, 10 \,.\, 9{\cdot}81 \,.\, 0{\cdot}1} = 4{\cdot}43$ m.

   b) $v = \sqrt{2 \,.\, 9{\cdot}81 \,.\, {}^1/_{10} \,.\, 36} = 8{\cdot}404$ m.

3. Aus $20 = 9{\cdot}81 \,.\, \sin 30^0 \cdot \dfrac{t}{2}$ folgt $t = 8{\cdot}155$ Secunden und daraus

$$s = \frac{1}{2} \,.\, 20 \,.\, \frac{8{\cdot}155}{2} = 40{\cdot}775 \text{ m.}$$

4. Aus der Formel $s = \dfrac{1}{2}\, g \sin \alpha\, t^2$ findet sich $g = \dfrac{2\,s}{t^2 \sin \alpha}$ und daraus ergeben sich im vorliegenden Falle die bezüglichen Werthe 9·867; 9·753; 9·791 m, also als arithmetisches Mittel derselben 9·804 m.

5. $x = \dfrac{366{\cdot}09}{\sin 32^0 14' \,.\, (4{\cdot}25)^2} = 38$ Fuß, also die Beschleunigung $= 76$ Fuß.

6. a) Die erforderliche Zeit zum Durchlaufen

von $AB = s$ (Fig. 24) ist $= \sqrt{\dfrac{2\,s}{g}}$

„ $AC = s_1$ „ $= \sqrt{\dfrac{2\,s_1}{g \sin \alpha}}$

„ $CB = s_2$ „ $= \sqrt{\dfrac{2\,s_2}{g \cos \alpha}}$;

Fig. 24.

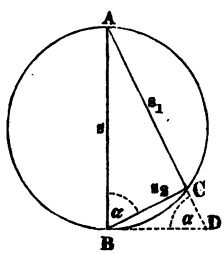
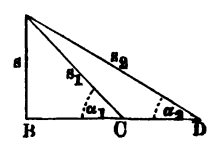



Fig. 25.



aber es ist $s_1 = s \cdot \sin \alpha$, $s_2 = s \cdot \cos \alpha$, folglich die drei Ausdrücke einander gleich.

b) Die Endgeschwindigkeit in $B$ (Fig. 25 a. v. S.) ist $= \sqrt{2gs}$

„ „ „ $C$ „ $= \sqrt{2g \sin \alpha_1 . s_1}$

„ „ „ $D$ „ $= \sqrt{2g \sin \alpha_2 . s_2}$;

aber es ist sowohl $s_1 \sin \alpha_1$ als auch $s_2 \sin \alpha_2 = s$.

7. Bezeichnet $t$ die zum Herabfallen auf der schiefen Ebene erforderliche Zeit, $t_1$ diejenige zum Herabfallen von der senkrechten Höhe, und $t_2$ diejenige zum Durchlaufen der Basis, so soll $t = t_1 + t_2$ sein.

Setzt man die Länge der schiefen Ebene $= 1$, also ihre Höhe $= \sin \alpha$, ihre Basis $= \cos \alpha$, so findet man

$$t = \sqrt{\frac{2}{g \sin \alpha}}; \; t_1 = \sqrt{\frac{2 \sin \alpha}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g \sin \alpha}} \cdot \sin \alpha$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{\cos \alpha^2}{2g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2}{g \sin \alpha}} \cdot \frac{\cos \alpha}{2}.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung und dividirt durch $\sqrt{\frac{2}{g \sin \alpha}}$, so erhält man $1 = \sin \alpha + {}^1/_2 \cos \alpha$, woraus $\cos \alpha = 0{\cdot}8$, also $\alpha = 36^0 52' 11''$ folgt.

Die Länge der schiefen Ebene verhält sich also zur Basis und Höhe wie $1 : \cos \alpha : \sin \alpha = 1 : 0{\cdot}8 : \sqrt{1 - 0{\cdot}8^2}$, d. h. wie $5 : 4 : 3$.

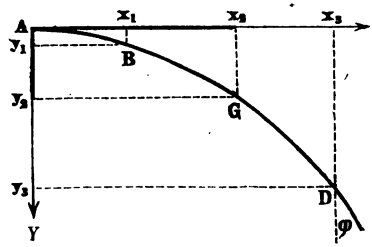
8. Bei einer schiefen Ebene von der Basis $a$ und dem Neigungswinkel $\alpha$ ist die Zeit zum Herabgleiten:

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \sin \alpha . \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{4a}{g \sin 2\alpha}},$$

sie ist also am kleinsten, wenn $\sin 2\alpha$ am größten, d. h. $= 1$, also $2\alpha = 90^0$ oder $\alpha = 45^0$ ist.

9. Man mache (Fig. 26) nach einem verjüngten Maßstabe $A x_1 = c = 6$ m $A y_1 = {}^1/_2 p = 1$ m, ziehe durch $x_1$ und $y_1$ die Parallelen $x_1 B$ und $y_1 B$, so giebt $B$ den Punkt an, in welchem sich der Körper nach 1 Secunde befindet. Macht man ferner $A x_2 = 2c = 12$ m, $A x_3 = 3c = 18$ m, sowie $A y_2 = 4 \cdot \frac{p}{2} = 4$ m, $A y_3 = 9 \cdot \frac{p}{2} = 9$ m und zieht die entsprechenden Parallelen, so bestimmen sich $C$ und $D$ als diejenigen Punkte der Curve, in welchen sich der Körper nach 2 und 3 Secunden befindet u. s. w.

Fig. 26.



**10.** Die Abscisse $x$ in horizontaler, die Ordinate $y$ in verticaler Richtung genommen ist $x = 19{\cdot}62 \,.\, 4 = 78{\cdot}48$ m, $y = \frac{9{\cdot}81}{2} \cdot 42 = 78{\cdot}48$ m.

**11.** a) Um $\frac{9{\cdot}81}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0{\cdot}3$ m ungefähr, die Geschwindigkeit der Kugel möge sein, welche sie wolle.

b) Aus $4 = \frac{1}{2} \cdot 31{\cdot}25\ t^2$ folgt $t = 0{\cdot}506$ Secunde.

**12.** a) Nimmt man die horizontale Richtung als Abscissen-, die verticale als Ordinatenaxe, so hat man $x = ct$, $y = \frac{1}{2} g t^2$.

b) $v = \sqrt{c^2 + g^2 t^2}$.

c) Der Winkel $\varphi$, den die resultirende Geschwindigkeit mit der verticalen Richtung bildet, bestimmt sich aus $tang\ \varphi = \frac{c}{gt}$.

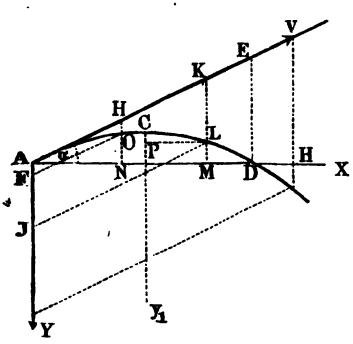
**13.** a) Eliminirt man aus den beiden Gleichungen $x = ct$ und $y = \frac{1}{2} g t^2$ die Veränderliche $t$, so erhält man $x^2 = \frac{2c^2}{g} y$, woraus man erkennt, daß die Bahn des Körpers eine Parabel ist.

b) $x^2 = \frac{2 \,.\, (19{\cdot}62)^2}{9{\cdot}81} \cdot y$ oder $x^2 = 78{\cdot}48\ y$.

**14.** Aus der in Aufgabe 13 gefundenen Gleichung, welche die Gestalt des ausströmenden Wasserstrahls ausdrückt, folgt $c = x \sqrt{\frac{g}{2y}}$, und da hier $y = 1{\cdot}75$ Fuß, $x = 5{\cdot}25$ Fuß, so ergiebt sich die gesuchte Geschwindigkeit $c = 15{\cdot}68$ Fuß.

**15.** a) Vermöge der erhaltenen gleichmäßigen Geschwindigkeit würde der Körper in der Richtung $AV$ (Fig. 27) während der Zeit $t$ den Weg $ct$, vermöge seines Fallens in der Richtung $AY$ aber den Weg $\frac{1}{2} g t^2$ zurücklegen; er wird sich also wegen der Gleichzeitigkeit der beiden Bewegungen nach der Zeit $t$ in einem Punkte befinden, der sich als der dem Punkte $A$ gegenüberliegende Winkelpunkt eines Parallelogramms darstellt, dessen den Winkel $90^0 + \alpha$ einschließenden Seiten $ct$ und $\frac{1}{2} g t^2$ sind.

Fig. 27.




Ist nun $AK = ct$ und $KL = AI = \frac{1}{2} g t^2$, also $L$ der Punkt, in welchem sich der Körper nach der Zeit $t$ befindet, so sind die Coordinaten dieses Punktes $L$

$$AM = ct \cos\alpha$$
$$ML = MK - KL = ct \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Denken wir uns $t$ als veränderlich und bezeichnen die Coordinaten jedes beliebigen Punktes der Wurfbahn bezüglich mit $x$ und $y$, die Abscissen $x$ von $A$ an auf der horizontalen $AX$, die Ordinaten $y$ von der horizontalen nach oben genommen, so erhalten wir

$$\text{I.} \quad x = ct \cos\alpha$$
$$\text{II.} \quad y = ct \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

b) Eliminirt man $t$ aus den vorstehenden Gleichungen I. und II., so erhält man

$$\text{III.} \quad y = x \operatorname{tang}\alpha - x^2 \frac{g}{2c^2 \cos\alpha^2} \text{ (Gleichung der Wurfbahn).}$$

**16.** a) Setzt man in der Gleichung III. $y = 0$, so ergiebt sich daraus $x (= AD$ in Fig. 27), also die Wurfweite $W = \dfrac{2c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \dfrac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$.

(Da die Gleichung III. eine quadratische ist, so hat sie noch eine zweite hier aber unbrauchbare Wurzel, nämlich 0.)

b) Setzt man in der Gleichung I. für $t$ die Wurfzeit $T$ und für $x$ den in a) für $W$ gefundenen Ausdruck $\dfrac{2c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$, so erhält man

$$\text{die Wurfzeit } T = \frac{2c \sin\alpha}{g}.$$

c) Setzt man in der Gleichung II. statt $x$ die halbe Wurfzeit ($\frac{1}{2}$ $T$), also $\dfrac{c \sin\alpha}{g}$, so erhält man $y$ d. h. die Wurfhöhe $H = \dfrac{c^2 \sin\alpha^2}{2g}$.

Um sich zu überzeugen, daß dieser Ausdruck die größte vom Körper erreichbare Höhe angiebt, und daß die Wurfbahn nach Erreichung dieser Höhe in derselben Weise fällt, wie sie vorher gestiegen war, setze man in der Gleichung II. statt $t$ zuerst $T + t_1$ und sodann $T - t_1$, substituire in beiden Gleichungen für $T$ den oben gefundenen Werth $\dfrac{2c \sin\alpha}{g}$, so findet man aus beiden für $y$ den nämlichen Werth, nämlich $\dfrac{c^2 \sin\alpha^2}{2g} - \dfrac{1}{2} g t_1^2 = H - \dfrac{1}{2} g t_1^2$, welcher Ausdruck ein Maximum wird, wenn $t_1 = 0$, also die zur Erreichung dieser Höhe erforderliche Zeit $\frac{1}{2}$ $T$ ist.

**17.** a) Nach voriger Aufgabe ist die Wurfweite $W = \dfrac{c^2}{g} \sin 2\alpha$; nun ist aber $\sin 2\alpha = \sin(180^0 - 2\alpha) = \sin[2(90^0 - \alpha)]$, folglich $W$ auch $= \dfrac{c^2}{g} \sin[2(90^0 - \alpha)]$.

b) Nein. Die den complementären Elevationswinkeln entsprechenden Wurfzeiten verhalten sich wie $\sin\alpha : \cos\alpha$, und die Wurfhöhen wie $\sin\alpha^2 : \cos\alpha^2$.

22. a) Aus Aufgabe 16 a) folgt $\sin 2\alpha = \frac{eg}{c^2}$ und daraus $\alpha = 7^0 49{\cdot}5'$.

b) Die Gleichung III. der Aufgabe 15, b) wird, wenn man darin $1 + \tang \alpha^2$ statt $\frac{1}{\cos \alpha^2}$ setzt, $y = x \tang \alpha - x^2 \frac{g(1 + \tang \alpha^2)}{2c^2}$, woraus folgt $\tang \alpha^2 - \frac{2c^2}{gx} \tang \alpha = -1 - \frac{2c^2 y}{gx^2}$,

$$\text{also I } \tang \alpha = \frac{c^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{gx}\right)^2 - 1 - 2 \cdot \frac{c^2}{gx} \cdot \frac{y}{x}}.$$

Wenn man nun der Aufgabe gemäß $x = e$, $y = e \tang \beta$ gesetzt und den Werth von $\frac{c^2}{ge} = n$ berechnet hat, so ist

$$\text{II. } \tang \alpha = n \pm \sqrt{n^2 - 1 - 2n \tang \beta}.$$

Aus der Gleichung folgen zwei Werthe für $\alpha$, im Falle aber $n^2 - 1 - 2n \tang \beta = 0$, also $\tang \beta = \frac{n^2 - 1}{2n}$ ist, nur einer, und die Gleichung wird unmöglich, wenn $\tang \beta > \frac{n^2 - 1}{2n}$.

Für $\beta = 0$ wird $2n \tang \beta = 0$, also $\tang \alpha = n \pm \sqrt{n^2 - 1}$.

Für einen negativen Werth von $\beta$, d. h. wenn der zu bewerfende Punkt unter der Horizontalen $AX$ liegt, wird $\tang \beta$ negativ, also die Gleichung:

$$\tang \alpha = n \pm \sqrt{n^2 - 1 + 2n \tang \beta}.$$

In Anwendung auf die numerischen Werthe der Aufgabe erhält man $n = 3{\cdot}7068$, $n^2 = 13{\cdot}7403$, $2n \tang \beta = 0{\cdot}6486$, und mit diesen Werthen

für $\beta = 5^0 \ldots . \alpha_1 = 82^0 4'5'$ (Bogenschuß); $\alpha_2 = 12^0 56{\cdot}5'$ (scharfer Schuß);

für $\beta = 0 \ldots . \alpha_1 = 82^0 10{\cdot}5$; $\alpha_2 = 7^0 49{\cdot}5'$,

welche zwei Winkel, wovon der letztere schon oben in a) gefunden ist, zu $90^0$ sich ergänzen (siehe Aufgabe 17. a), was im vorigen und nachfolgenden Fall nicht stattfinden kann,

für $\beta = -5^0 \ldots . \alpha_1 = 82^0 17{\cdot}1'$; $\alpha_2 = 2^0 43{\cdot}9'$.

c) unter b) erledigt.

25. Setzt man in der Gleichung $y = x \tang \alpha - x^2 \frac{g}{2c^2 \cos \alpha^2}$

$$y = H - y_1 = \frac{c^2}{2g} \sin \alpha^2 - Y_1$$

$$x = \frac{1}{2} W + x_1 = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + x_1$$

(d. h. bezüglich des Punktes $L$ in Fig. 27 $y = ML = BC - CP$; $x = AM = AB + PL$), so erhält man $x_1{}^2 = \frac{2c^2 \cos \alpha^2}{g} y_1$, woraus

man erkennt, daß die Wurfbahn eine Parabel ist. Man kann aber natürlich dafür $x_2 = \frac{2\,c^2\,cos\,\alpha^2}{g}\,y$ schreiben, wenn man sich merkt, daß bei dieser Form der Gleichung die Coordinaten $x$ und $y$ vom Scheitelpunkt der Wurfbahn genommen sind. Die Gleichung geht für $\alpha = 0$ in die schon in 13 gefundene über.

18. Aus Auflösung zu 16 a) folgt, daß bei gleicher Geschwindigkeit $W$ am größten sein muß, wenn $sin\ 2\,\alpha$ am größten, d. h. wenn $\alpha = 45^0$, also $sin\ 2\,\alpha = 1$ ist. Da nun in diesem Falle $W = \frac{c^2}{g}$, $H = \frac{c^2}{2g}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$ $= \frac{c^2}{4g}$, so ergiebt sich die Wurfweite 4mal so groß als die Wurfhöhe.

19. $W = 141{\cdot}25$ m; $H = 20{\cdot}4$ m; $T = 4{\cdot}08$ Secunden.
$W = 163{\cdot}1$ m; $H = 40{\cdot}78$ m; $T = 5{\cdot}76$ Secunden.

20. In einer Höhe von $800 \,.\, 2{\cdot}5 \,.\, sin\ 15^0 - {}^1/_2 \,.\, 9{\cdot}81 \,.\, (2{\cdot}5)^2 = 517{\cdot}6 - 30{\cdot}66 = 486{\cdot}94$ m.

21. Aus $sin\ \alpha = \sqrt{\frac{2\,.\,9{\cdot}81\,.\,400}{120^2}} = 0{\cdot}73824$ folgt $\alpha = 47^0 35'$.

22. $H = \frac{30^2\,.\,(sin\ 60^0)^2}{2\,.\,9{\cdot}81} = 45{\cdot}87\ (sin\ 60^0)^2 = 34{\cdot}4$ m,
$W = 2\,.\,45{\cdot}87\,.\,sin\ 120^0 = 79{\cdot}45$ m.

23. Sie sind einander gleich, wie überhaupt die Wurf- oder Sprungweiten bei zwei Elevationswinkeln, die sich einander zu $90^0$ ergänzen (siehe 17).

---

## Auflösungen zu VII.

---

1. Die Lineargeschwindigkeit ist $= \frac{2\,\pi\,r}{t}$, die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2\,\pi}{t}$, da man unter Winkelgeschwindigkeit die Geschwindigkeit eines Körpers in einem Kreise vom Halbmesser $= 1$ versteht.

2. Erstere ist $= \frac{2\,.\,3\,.\,3{\cdot}1416}{4} = 4{\cdot}7124$ m, letztere $= \frac{2\,.\,3{\cdot}1416}{4}$ $= 1{\cdot}5708$ m.

3. $v = \frac{3\,.\,3{\cdot}1416\,.\,40}{60} = 6{\cdot}283$ m.

4. Die erstere $= \frac{5400 \cdot 7500}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 468{\cdot}75$ m,

die letztere $= \frac{2 \cdot 3{\cdot}1416}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{\cdot}0000727$.

5. Bei einem Umlauf in der Minute ist die Umlaufsgeschwindigkeit (d. h. der von einem Punkte der Peripherie in einer Secunde zurückgelegte Weg) $= \frac{d\pi}{60}$, also bei $n$ Umläufen in der Minute $= \frac{n d \pi}{60} = c$, woraus $n = \frac{60 c}{d \pi} = 191$ folgt.

6. Aus $\frac{n d \pi}{60} = c$ folgt $d = \frac{60 c}{n \pi} = 1{\cdot}43$ m.

7. $n = \frac{60 c}{d \pi} = 7{\cdot}16$.

8. $f = \frac{6^2}{9} = 4$ m, der Körper wird also in jeder Secunde um $4/2 = 2$ m von der Tangente des Kreises abgelenkt.

9. Da die Geschwindigkeit $= \frac{2\pi \cdot 5}{5} = 6{\cdot}283$ m ist, so ist $f = \frac{(6{\cdot}283)^2}{5} = 7{\cdot}896$ m.

10. $F = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{G}{g} = \frac{3^2}{0{\cdot}5} \cdot \frac{109}{9{\cdot}81} = 200$ g. Der Faden muß also ein Gewicht von wenigstens 200 g tragen können, wenn er durch die Gegenwirkung der rotirenden Masse nicht zerrissen werden soll.

11. $F = \frac{3^2}{2} \cdot \frac{65{\cdot}4}{9{\cdot}81} = 30$ Kg, oder die Centripetalkraft ist $\frac{50}{109}$ mal so groß als das Gewicht des Körpers.

12. Aus $F = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{G}{g}$ folgt, wenn man der Bedingung der Aufgabe gemäß $F = G$ setzt, $\frac{c^2}{rg} = 1$; also muß $F = G$ sein, wenn entweder $c = \sqrt{rg}$ oder $r = \frac{c^2}{g}$ oder $g = \frac{c^2}{r}$ ist.

In der vorhergehenden Aufgabe würde also die Ablenkungskraft dem Gewicht des Körpers gleich sein, wenn entweder $r = 0{\cdot}9174$ m, oder $c = 4{\cdot}4295$ m, oder $g = 4{\cdot}5$ m wäre.

13. Bezeichnen wir die Centrifugalkraft der ersten Kugel mit $F_1$, die der zweiten mit $F_2$, so haben wir

$$F_1 = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{G}{g} = \frac{\left(\frac{2r\pi}{t}\right)^2}{r} \cdot \frac{G}{g} = \frac{4\pi^2 r}{t_2} \cdot \frac{G}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{\cdot}4 \cdot 6}{t^2 g} \text{ Loth},$$

$F_2 = \frac{4\pi^2 . x . 2}{t^2 g}$ Loth, wo $x$ die gesuchte Entfernung bezeichnet. Nun muß der Bedingung der Aufgabe gemäß $F_1 = F_2$, also $0{\cdot}4 . 6 = x . 2$ sein, woraus $x = 1{\cdot}2$ Fuß folgt.

14. Wenn der Wagen nicht aus den Schienen getrieben werden soll, darf offenbar das Drehungsmoment der Centrifugalkraft des Wagens höchstens dem der Schwerkraft (beide Momente auf die äußere Bahnschiene bezogen) gleich sein. Das Drehungsmoment der Centrifugalkraft des Wagens ist $= 4 \cdot \frac{v^2}{240} \cdot \frac{G}{g}$, das Drehungsmoment der Schwerkraft $= {}^5/_2\ G$. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Momente ergiebt sich $v^2 = \frac{240 . 5 . 31{\cdot}25}{2 . 4}$ $= 4687{\cdot}5$, also $v = 68{\cdot}5$ Fuß.

15. Bezeichnet $c$ die Geschwindigkeit des Körpers, so hat man $f_0 = \frac{c^2}{r}$ $= \frac{4\pi^2 r}{t^2} = \frac{4 . 9{\cdot}8696044 . 20318900}{86164^2} = 0{\cdot}108$ Fuß.

16. Bezeichnet $g_0$ die beobachtete, $G$ aber diejenige Beschleunigung der Schwerkraft, welche am Aequator stattfinden würde, wenn sich die Erde nicht drehte, so findet sich mittelst des in der vorhergehenden Aufgabe gefundenen Werthes von $f_0$

$$G = g_0 + f_0 = 31{\cdot}1643 + 0{\cdot}108 = 31{\cdot}2723 \text{ Fuß},$$

also $\frac{f_0}{G} = \frac{0{\cdot}108}{31{\cdot}2723} = \frac{1}{289{\cdot}5}$ oder $\frac{f_0}{g_0} = \frac{0{\cdot}108}{31{\cdot}1641} = \frac{1}{288{\cdot}5}$.

17. Für diesen Fall müßte die Centripetalbeschleunigung $f_0$ der Beschleunigung der Schwerkraft gleich, also der vorhergehenden Aufgabe gemäß 289mal so groß sein, als sie wirklich ist, folglich müßte, da $f_0 = \frac{c^2}{r}$ ist, $r$ aber unverändert bleibt, $c^2$ 289 mal, d. h. $c$ müßte 17 mal so groß sein, als dies jetzt der Fall ist.

18. Nach dem Vorhergehenden müßte die Geschwindigkeit des Körpers wenigstens 17mal so groß sein, als die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde, d. h. 17 . 1482 Fuß.

19. Bezeichnet $r$ den Halbmesser der als kugelförmig angenommenen Erde und $t$ ihre Umlaufszeit, so ist die Beschleunigung der Ablenkungskraft eines Körpers (Fig. 28)

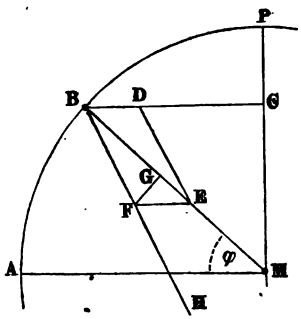
an einem Punkte $A$ des Aequators $= \frac{4\pi^2 r}{t^2} = f_0$,

also „ „ „ $B$ in der Breite $\varphi = \frac{4\pi^2 r \cos\varphi}{t^2} = f_0 \cos\varphi$.

Stellt nun $BE$ die Beschleunigung $G$ der totalen Schwerkraft, d. h. derjenigen, welche an der Oberfläche der Erde stattfinden würde, wenn sie sich

nicht drehte, sowie $BD$ die Beschleunigung der Ablenkungskraft am Punkte $B$ dar, so ergiebt sich durch Zerlegung von $BE$ in die beiden Componenten $BD$ und $BF$ diese letztere $BF$ als die Beschleunigung $g_\varphi$ der restirenden Schwerkraft im Punkte $B$*). Fällt man $FG$ senkrecht auf $BE$, so ist $EG = EF$. $\cos\varphi = BD \,.\, \cos\varphi$, oder, da $BD = f_0 \cos\varphi$ ist, $EG = f_0 \cos\varphi^2$. Wegen der Kleinheit des Winkels $EBF$ kann man $BF = BG = BE - EG$ setzen; also ist $g_\varphi = G - f_0 \cos\varphi^2 = G - f_0 + f_0 \sin\varphi^2$, oder, da $G - f_0 = g_0$, d. h. der restirenden Beschleunigung der Schwerkraft am Aequator ist, $g_\varphi = g_0 + f_0 \sin\varphi^2$, woraus $g_\varphi - g_0 = f \sin\varphi^2$ folgt, was zu beweisen war.

Fig. 28.




20. Aus der vorhergehenden Auflösung folgt $g_\varphi = g_0 \left(1 + \frac{f_0}{g_0} \sin\varphi^2\right)$, oder, da $\frac{f_0}{g_0} = \frac{1}{289}$ (Aufgabe 16), $g_\varphi = g_0 \left(1 + \frac{1}{289} \sin\varphi^2\right)$, und daraus für $\varphi = 90^0$, $g_{90} = g_0 \left(1 + \frac{1}{289}\right)$, also die Zunahme der Schwere am Pole $= \frac{1}{289} g_0$.

Genauer als die vorhergehende unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde theoretisch abgeleitete Formel ist die nachstehende auf Pendelbeobachtungen und Gradmessungen sich stützende, die sich aus Aufgabe 17 in IX. ergiebt, wenn man dort $L = \frac{g}{\pi^2}$ und $L_0 = \frac{g_0}{\pi^2}$ setzt, nämlich

$$g_\varphi = g_0 (1 + 0{\cdot}00511781 \sin\varphi^2) = g_0 \left(1 + \frac{1}{195} \sin\varphi^2\right),$$

worin $g_0 = 9{\cdot}78103$ m $= 31{\cdot}1643$ preuß. Fuß ist, woraus der Ueberschuß der Schwere am Pole über die am Aequator $= \frac{1}{195} g_0$ folgt.

21. Aus der letzten Formel der vorigen Auflösung ergiebt sich, da $(\sin 45^0)^2 = 0{\cdot}5$ ist,

$g = g_0 (1 + 0{\cdot}002558905) = 9{\cdot}80606$ m $= 31{\cdot}24406$ preuß. Fuß.

22. Die Geschwindigkeit des Mondes in seiner Bahn ist

$$= \frac{2\pi \,.\, 60r}{27{\cdot}3 \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60} = c, \text{ also } f = \frac{c^2}{60r} = 0{\cdot}00865 \text{ Fuß.}$$

*) Nämlich desjenigen Theils der totalen Schwerkraft, welcher nicht zur Ablenkung des Körpers verwendet wird.

23. Die Beschleunigung des Falls der Erde gegen die Sonne oder die Centripetalbeschleunigung der Erde ist $= \frac{(4{\cdot}12)^2}{21\,000\,000}$ Meilen $= \frac{(4{\cdot}12)^2 . 24\,000}{21\,000\,000}$ $= 0{\cdot}0194$ Fuß, also würde der Fallraum während der ersten Secunde $= 0{\cdot}0097$ Fuß, folglich während der ersten Minute $= 0{\cdot}0097 . 60^2$ $= 35$ Fuß sein.

24. Die Beschleunigung des Falls des Mondes gegen die Erde ist (nach Aufgabe 22) $= 0{\cdot}00865$, also sein Fallraum während der ersten Minute $= \frac{1}{2} . 0{\cdot}00865 : 60^2 = 15{\cdot}57$ Fuß. Da nun die Sonne 400mal so weit von der Erde entfernt ist als der Mond, also jeder Massetheil der Sonne von der Erde 160 000mal so wenig angezogen wird als ein gleicher des Mondes, so ist der Fallraum der Sonne nach der Erde während der ersten Minute $= \frac{15{\cdot}57}{160\,000} = 0{\cdot}0000973$ Fuß.

25. Da sich die Massen zweier einander anziehenden Körper zu einander umgekehrt verhalten, wie ihre Beschleunigungen oder wie die vom Anfang der Bewegung an während gleicher Zeiten zurückgelegten Wege, so hat man im vorliegenden Falle $M : 1 = 35 : 0{\cdot}0000973$ (s. Auflösungen zu 23 und 24), also $M = \frac{35}{0{\cdot}0000973} = 360\,000$, $D = \frac{M}{V} = \frac{360\,000}{1\,400\,000} = \frac{1}{4}$ beiläufig.

26. Wäre der Halbmesser der Sonne = dem der Erde, so würde die Anziehung auf der Sonnenoberfläche 360 000mal so groß sein, als auf der Erdoberfläche, weil nach voriger Auflösung die Masse der Sonne 360 000mal so groß ist, als die der Erde. Da aber der Sonnenhalbmesser 112mal so groß ist, als der Erdhalbmesser, also ein Körper an der Sonnenoberfläche 112mal so weit von ihrem Mittelpunkt (in welchem wir uns ihre Masse vereinigt denken können) entfernt ist, als vorhin angenommen wurde, so wird die Anziehung an der Sonnenoberfläche $112^2$ oder 12 544mal so gering als die oben angegebene, also nur $\frac{360\,000}{12\,544}$ oder 28mal stärker sein als die an der Erdoberfläche, d. h. ein Körper wird an der Oberfläche der Sonne 28mal so viel Gewicht haben als an der Oberfläche der Erde.

27. Bezeichnet $x$ die Beschleunigung, welche die Erdmasse $M$ jeder Masseneinheit des Steins zu ertheilen strebt, und $m$ die Masse des Steins, so drückt $mx$ die Kraft aus, mit welcher der Stein von der Erdmasse angezogen wird (II, 3). Ist dagegen $y$ die Beschleunigung, welche der Stein jeder Masseneinheit der Erde zu ertheilen strebt, so giebt $My$ die Kraft an, mit welcher die Erde vom Stein angezogen wird. Folglich muß nach dem Gravitationsgesetz $My = mx$ sein, d. h. die Beschleunigungen der beiden Körper verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen. Daraus folgt $y = \frac{m}{M} x$. Da nun

$m$ gegen $M$ verschwindend klein ist, so muß auch $y$ gegen $x$, also die Bewegung der Erde gegen die des Steins verschwindend klein sein.

28. Nein! Das angeführte Gesetz bezieht sich nur auf außerhalb der Erde befindliche Körper, da nur auf diese die Anziehung der ganzen Erdkugel im Sinne der Bewegung nach dem Mittelpunkte zu wirkt, während ein im Innern der Erde befindlicher Körper nur durch einen Theil der Kugelmasse in dieser Richtung, durch den übrigen Theil aber in entgegengesetzter Richtung angezogen wird. Die Erde von überall gleicher Dichte vorausgesetzt, läßt sich nachweisen, daß die Anziehung auf einen in ihrem Innern befindlichen materiellen Punkt derjenigen einer kleinern Erdkugel gleich ist, welche die Entfernung jenes Punktes vom Erdmittelpunkte zum Halbmesser hat. Im Mittelpunkt der Erde wird daher ein Körper gar kein Gewicht haben.

29. Aus $\frac{g}{x} = \frac{(r+h)^2}{r^2} = \left(1 + \frac{h}{r}\right)^2$ oder hinlänglich genau $= 1 + 2\frac{h}{r}$ folgt $x = g\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$.

30. Er würde seine größte Geschwindigkeit im Mittelpunkte der Erde haben und mit der nämlichen Geschwindigkeit, mit welcher er in die Erde eintrat, sie wieder verlassen.

31. Bezeichnet $\beta$ die Beschleunigung, welche von zwei um die Längeneinheit von einander entfernte Masseneinheiten jede der andern ertheilt, so ist $M\beta$ die Kraft, welche von der Sonnenmasse $M$ jeder in der Entfernung $= 1$ befindlichen Masseneinheit und $\frac{M\beta}{e^2}$ die Kraft, welche ihr in der Entfernung $= e$ ertheilt wird*). $\frac{M\beta}{e^2}$ drückt also die beschleunigende Kraft oder Beschleunigung, folglich $m \cdot \frac{M\beta}{e^2}$ die bewegende Kraft aus, welche die Erdmasse $m$ durch die Anziehung erhält (II, 3), und zwar in Kilogrammen, wenn $\beta$ und $e$ in Metern sowie $M$ und $m$ in den Masseneinheiten der Aufgabe 4 in II. gegeben sind.

Durch ähnliche Schlüsse findet man $\frac{m\beta}{e^2}$ als die Beschleunigung und $M \cdot \frac{m\beta}{e^2}$ als die Kraft, welche die Sonnenmasse $M$ durch die Anziehung erhält.

Während also die anziehenden Kräfte der Sonne und Erde einander gleich sind, verhalten sich die Beschleunigungen, welche sie durch die Anziehung erhalten, umgekehrt wie ihre Massen. Wenn also die beiden Himmelskörper plötzlich ohne Bewegung einander gegenüberständen, so würden sie sich in der Art gegen einander bewegen, daß sie in gleicher Zeit Strecken zurücklegten,

*) Die Massen der Sonne und der Erde werden hier in ihren Mittelpunkten concentrirt gedacht, da sich beweisen läßt, daß eine aus concentrischen Schichten bestehende solide Kugel auf einen äußern materiellen Punkt gerade so wirkt, als ob ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

welche den Massen umgekehrt proportional wären, sie würden folglich in einem Punkte zusammentreffen, dessen Entfernungen von ihrer anfänglichen Stellung gleichfalls in jenem Verhältniß ständen. Bezeichnet $x$ die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte der Sonne, so folgt aus $\frac{x}{e-x} = \frac{m}{M} \cdots$

$$x = \frac{me}{M+m}.$$

32. Bezeichnet $x$ die gesuchte Entfernung der Masse $m$ von der Masse $M_1$, so ergiebt sich nach voriger Aufgabe $\frac{m M_1 \beta}{x^2}$ als die bewegende Kraft, welche die Masse $m$ von der Masse $M_1$ erhält, und $\frac{m M_2 \beta}{(d-x)^2}$ als die, welche die Masse $m$ nach der Masse $M_2$ treibt, und aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke ergiebt sich $x = \frac{M_1 \pm \sqrt{M_1 M_2}}{M_1 - M_2} \cdot d$; man findet also zwei Punkte, in welchen die Masse $m$ gleich stark von den beiden Massen $M_1$ und $M_2$ angezogen wird, wovon der eine zwischen den beiden Massen, der andere in der Verlängerung ihrer Verbindungslinie liegt.

33. Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz hat man $U^2 : u^2 = D^3 : d^3$ und daraus $d = \sqrt[3]{\frac{u^2 D^3}{U^2}} = 20 \,.\, 10^6 \sqrt[3]{\frac{224 \cdot 72}{365 \cdot 262}} =$ nahe 15 Millionen Meilen.

---

## Auflösungen zu VIII.

---

1. a. Man denke sich die Stange (Linie) in unendlich viele gleiche Theile getheilt, bilde die Producte aus jedem dieser Theilchen mit dem Quadrate seiner Entfernung von der Drehaxe und addire diese Producte. Ist $n$ die Anzahl der gleichen Theilchen, so ist $\frac{M}{n}$ die Masse, $\frac{b}{n}$ die Länge eines solchen, also, wenn das Trägheitsmoment der Stange mit $M$ bezeichnet wird,

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{n}\left[\left(1 \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(n \cdot \frac{b}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{M b^2}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right)$$

oder, da, wenn $n$ unendlich groß, $\frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{3}$ ist*),

$$\text{I.} \quad \mathfrak{M} = {}^1/_3 M b^2,$$

d. h. die Masse ${}^1/_3 M$ in einer der Längeneinheit gleichen Entfernung von der Axe, oder die Masse ${}^1/_3 M$ am Ende der Stange $b$, oder die Masse $M$ am Dreharm $b\sqrt{{}^1/_3}$ in einem Punkte concentrirt, leistet einer drehenden Kraft denselben Widerstand wie die Masse $M$ bei ihrer Vertheilung in der Stange.

b. Man muß die Trägheitsmomente der beiden Theile $b_1$ und $b_2$ der Stange in Beziehung auf die Drehaxe bestimmen und diese addiren.

Da die Masse des einen Theils $= \frac{b_1}{b_1 + b_2} M$, die des andern $= \frac{b_2}{b_1 + b_2} M$ ist, so erhält man (nach I.)

$$\mathfrak{M} = {}^1/_3 \frac{b_1}{b_1 + b_2} M b_1^2 + {}^1/_3 \frac{b_2}{b_1 + b_2} M b_2^2 = {}^1/_3 M \frac{b_1^3 + b_2^3}{b_1 + b_2}$$

oder

$$\text{II.} \quad \mathfrak{M} = {}^1/_3 M (b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2).$$

c. Aus II. folgt, weil hier $b_1 = b_2 = {}^1/_2 b$ ist,

$$\text{III.} \quad \mathfrak{M} = {}^1/_3 M ({}^1/_2 b)^2 = {}^1/_{12} M b^2.$$

2. a. Denkt man sich die Länge $b$ der Stange in $n$ unendlich kleine Theile getheilt, so ist $\frac{M}{n}$ die Masse und $\frac{b}{n}$ die Länge jedes dieser Theilchen und das erste derselben ist von $O$ entfernt um die Strecke $OA = a$,

„ zweite „ „ „ „ „ „ „ „ $OC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2}$,

„ dritte „ „ „ „ „ „ „ „ $OD = \sqrt{a^2 + \left(2\frac{b}{n}\right)^2}$,

. . .

„ $n$te „ „ „ „ „ „ „ „ $ON = \sqrt{a^2 + \left((n-1)\frac{b}{n}\right)^2}$;

folglich ist das gesuchte Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{n}\left[a^2 + \left(a^2 + \frac{b^2}{n^2}\right) + \left(a^2 + 4\cdot\frac{b^2}{n^2}\right) + \left(a^2 + 9\cdot\frac{b^2}{n^2}\right) + \cdots + \left(a^2 + (n-1)^2\frac{b^2}{n^2}\right)\right]$$

*) Denn $\frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$ ist $= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$; für $n = \infty$ werden aber die beiden letzten Summanden $= 0$.

$$= \frac{M}{n}\left[n a^2 + \left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right)\frac{b^2}{n^2}\right]$$

$$= M\left[a^2 + \left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots (n-1)^2\right)\frac{b^2}{n^3}\right],$$

oder, da, wenn $n$ unendlich groß, $\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 \cdot \frac{1}{n^3}\right) = 1/3$ ist (s. vor. Aufg.),

$$\text{I.} \quad \mathfrak{M} = M\,(a^2 + 1/8\, b^2).$$

b. Die Massen der beiden Theile $b_1$ und $b_2$ sind bezüglich $\frac{b_1}{b_1 + b_2} M$ und $\frac{b_2}{b_1 + b_2} M$, also $\mathfrak{M} = \frac{b_1}{b_1 + b_2} M\,(a^2 + 1/3\, b_1^2) + \frac{b_2}{b_1 + b_2} M\,(a^2 + 1/3\, b_2^2)$, oder

$$\text{II.} \quad \mathfrak{M} = M\,[a^2 + 1/3\,(b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2)].$$

c. Wegen $b_1 = b_2 = 1/2\, b$ ist

$$\text{III.} \quad \mathfrak{M} = M\,[a^2 + 1/3\,(1/2\, b)^2] = M\,(a^2 + 1/12\, b^2).$$

Bemerkung. Die vorstehenden Formeln I., II., III. gehen, wenn man in ihnen $a = 0$ setzt, in die Formeln I., II., III. der vorigen Aufgabe über.

3. Man denke sich das Dreieck $AOB$ in $n$ sehr schmale auf $OA$ senkrecht stehende Streifen zerlegt und addire die Trägheitsmomente derselben. Jeder dieser Streifen hat eine Breite $= \frac{a}{n}$, der erst zunächst $O$ liegende eine Höhe $= \frac{b}{n}$, also eine Masse $= \frac{ab\mu}{n^2}$,

der zweite Streifen hat eine Höhe $= 2 \cdot \frac{b}{n}$, „ „ „ $= 2 \cdot \frac{ab\mu}{n^2}$,

„ dritte „ „ „ „ $= 3 \cdot \frac{b}{n}$, „ „ „ $= 3 \cdot \frac{ab\mu}{n^2}$,

. . .

„ $n$te „ „ „ „ $= n \cdot \frac{b}{n}$, „ „ „ $= n \cdot \frac{ab\mu}{n^2}$,

wenn $\mu$ die Masse der Flächeneinheit bezeichnet; also ist nach voriger Aufgabe das Trägheitsmoment

des ersten Streifens $= \frac{a\,b\,\mu}{n^2}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{n}\right)^2\right]$,

„ zweiten „ $= 2\cdot\frac{a\,b\,\mu}{n^2}\left[\left(2\cdot\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^2\right]$,

„ dritten „ $= 3\cdot\frac{a\,b\,\mu}{n^2}\left[\left(3\cdot\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^2\right]$,

. . . . . .

„ nten „ $= n\cdot\frac{a\,b\,\mu}{n^2}\left[\left(n\cdot\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^2\right]$,

folglich das gesuchte Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{a\,b\,\mu}{n^4}\,(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)\,a^2 + {}^1/_3\,b^2),$$

oder, da, wenn $n$ unendlich groß, $\frac{1}{n^4}\cdot(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = {}^1/_4$ ist *),

$$\mathfrak{M} = \frac{a\,b\,\mu}{4}\,(a^2 + {}^1/_3\,b^2) = \frac{a\,b\,\mu}{12}\,(3\,a^2 + b^2),$$

oder, wegen $\frac{a\,b\,\mu}{2} = M$,

$$\text{I.}\quad \mathfrak{M} = {}^1/_6\,M\,(3\,a^2 + b^2),$$

oder, wenn man statt der Kathete $b$ die Hypothenuse $c$ einführt, also $b^2 = c^2 - a^2$ setzt,

$$\text{II.}\quad \mathfrak{M} = {}^1/_6\,M\,(2\,a^2 + c^2).$$

4. Da man sich das Dreieck aus zwei rechtwinkeligen Dreiecken bestehend denken kann, so folgt aus Formel II. der Aufgabe 3:
$\mathfrak{M} = {}^1/_6\,({}^1/_2\,M)\,(2\,a^2 + c^2) + {}^1/_6\,({}^1/_2\,M)\,(2\,a^2 + c^2) = {}^1/_6\,M\,(2\,a^2 + c^2)$.

5. Aus Formel I. der Aufgabe 3 folgt, da man sich das Rechteck aus zwei rechtwinkeligen Dreiecken bestehend denken kann,
$\mathfrak{M} = {}^1/_6\,({}^1/_2\,M)\,(3\,a^2 + b^2) + {}^1/_6\,({}^1/_2\,M)\,3\,b^2 + a^2) = {}^1/_3\,M\,(a^2 + b^2)$.

6. Das regelmäßige $n$-Eck besteht aus $n$ congruenten, gleichschenkeligen Dreiecken; aus Aufgabe 4 folgt daher

$$\mathfrak{M} = n\,.\,{}^1/_6\left(\frac{1}{n}\,M\right)(2\,r^2 + R^2) = {}^1/_6\,M\,(2\,r^2 + R^2).$$

7. Aus voriger Aufgabe folgt:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_6\,M\,(2\,r^2 + r^2 = {}^1/_2\,M\,r^2.$$

---

*) Denn $\frac{1}{n^4}\,(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$ ist $= \frac{1}{n^4}\,\frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = {}^1/_4 + \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{4\,n^2}$, in welchem Ausdruck für $n = \infty$ die zwei letzten Summanden $= 0$ werden.

8. Denkt man sich das Prisma in unendlich viele, mit der Grundfläche parallele Schichten zerlegt, so ist, wenn $n$ die Anzahl derselben bezeichnet, die Masse jeder dieser Schichten $= \frac{M}{n}$ und das Trägheitsmoment einer solchen (nach Aufgabe 3, Formel I.) $= \frac{1}{6}\frac{M}{n}(3a^2 + b^2)$, folglich das Trägheitsmoment aller $n$ Schichten

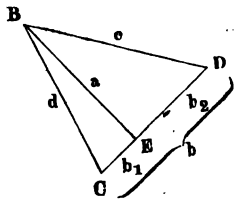
$$\mathfrak{M} = n \,.\, \tfrac{1}{6}\frac{M}{n}(3a^2 + b^2) = \tfrac{1}{6} M (3a^2 + b^2).$$

9. Das gesuchte setzt sich aus den Trägheitsmomenten zweier Prismen zusammen, wovon ein jedes ein rechtwinkeliges Dreieck von der Grundlinie $\frac{1}{2} b$ und der Höhe $a$ zur Grundfläche und die Höhe $h$ sowie die Masse $\frac{1}{2} M$ hat und sich um die der Kante $b$ gegenüberliegende Kante $h$ dreht; nach voriger Aufgabe ist daher

$$\mathfrak{M} = 2 \,.\, \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{2} M)[3a^2 + (\tfrac{1}{2} b)^2] = \tfrac{1}{24} M (12a^2 + b^2).$$

10. Man denke sich das Prisma durch eine Ebene, die durch die Kante $h$ geht und auf der Grundfläche senkrecht steht, in zwei Prismen zerlegt, deren Grundfläche rechtwinkelige Dreiecke sind, bestimme deren Trägheitsmomente in Beziehung auf die Drehaxe $h$ und addire diese. $BCD$ (Fig. 29) sei die Grundfläche des Prismas, $B$ der Punkt, durch welchen die Drehaxe $h$ geht, und jene Ebene schneide die Grundfläche in der Linie $a$, die also auf $b$ senkrecht steht und diese in die beiden Segmente $b_1$ und $b_2$ zerlegt. Das eine der beiden Prismen hat also zur Grundfläche ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten $a$ und $b_1$, das andere ein solches mit den Katheten $a$ und $b_2$, beide Prismen haben die gemeinschaftliche Höhe $h$, also ist die Masse des einen Prismas $= \frac{M b_1}{b}$, die des anderen $= \frac{M b_2}{b}$, folglich das gesuchte Trägheitsmoment

Fig. 29.




$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}\frac{M b_1}{b}(3a^2 + b_1^2) + \tfrac{1}{6}\frac{M b^2}{b}(3a^2 + b_2^2)$$

$$= \tfrac{1}{6} M\left(3a^2 + \frac{b_1^3 + b_2^3}{b}\right),$$

worin noch $a$, $b_1$ und $b_2$ durch die Seiten $b$, $c$ und $d$ auszudrücken sind.

Nun ist $b_1 = \frac{b^2 + d^2 - c^2}{2b}$, $b_2 = \frac{b^2 + c^2 - d^2}{2b}$ (Ebene Geometrie §. 47, 2),

folglich $\frac{b_1^3 + b_2^3}{b} = \frac{b^4 + 3c^4 - 6c^2 d^2 + 3d^4}{4b^2}$

und $a^2 = d^2 - b_1^2 = \dfrac{2\,b^2c^2 + 2\,b^2d^2 + 2\,c^2d^2 - b^4 - c^4 - d^4}{4\,b^2}$

also nach Substitution dieser Ausdrücke und gehöriger Reduction

$$\mathfrak{M} = {}^1/_{12}\,M\,(3\,c^2 + 3\,d^2 - b^2).$$

11. a. Denkt man sich das Parallelepiped mittelst einer durch die Kante $h$ gelegten Diagonalebene in zwei gleiche Prismen getheilt, deren Grundflächen rechtwinkelige Dreiecke sind, so ergiebt sich nach Aufg. 8:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_6\,({}^1/_2\,M)\,(3\,a^2 + b^2) + {}^1/_6\,({}^1/_2\,M)\,(a^2 + 3\,b^2)$$
$$= {}^1/_3\,M(a^2 + b^2).$$

b. In diesem Falle kann man sich den Körper in zwei gleiche Parallelepipede zerlegt denken und findet nach a:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_3\,({}^1/_2\,M)\,[({}^1/_2\,a)^2 + b^2] + {}^1/_3\,({}^1/_2\,M)\,[({}^1/_2\,a)^2 + b^2)$$
$$= {}^1/_{12}\,M\,(a^2 + 4\,b^2).$$

c. $\mathfrak{M} = 4\,.\,{}^1/_3\,({}^1/_4\,M)\,[({}^1/_2\,a)^2 + ({}^1/_2\,b)^2] = {}^1/_{12}\,M\,(a^2 + b^2).$

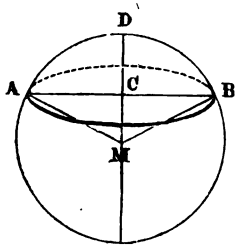
12. Durch ähnliche Schlüsse wie in Aufgabe 8 findet man aus Aufgabe 7: $\mathfrak{M} = {}^1/_2\,Mr^2$.

13. Ein massiver Cylinder von der gleichen Dichte wie die Masse $M$ des hohlen Cylinders würde bei einem Halbmesser $= R$ die Masse $\dfrac{MR^2}{R^2 - r^2}$ und bei einem Halbmesser $= r$ die Masse $\dfrac{Mr^2}{R^2 - r^2}$ haben, also ist der vorigen Aufgabe entsprechend,

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2\,\frac{MR^2}{R^2 - r^2}\cdot R^2 - {}^1/_2\,\frac{Mr^2}{R^2 - r^2}\cdot r^2 = {}^1/_2\,M\,(R^2 + r^2).$$

14. Man denke sich (Fig. 30) die Höhe $CD = h$ des Kugelsegments in $n$ gleiche Theile getheilt und durch die Theilungspunkte Ebenen parallel mit der Grundfläche $AB$ gelegt, so kann man sich, wenn man $n$ unendlich groß annimmt, das Segment aus unendlich vielen Cylindern bestehend denken, wovon jeder die Höhe $\dfrac{h}{n}$ hat, während die Quadrate der Radien ihrer Grundflächen (in der Reihe von $D$ nach $C$ genommen) gleich sind: $\left(2r - \dfrac{h}{n}\right)\dfrac{h}{n}$,

Fig. 30.




$\left(2r - 2\cdot\dfrac{h}{n}\right)2\cdot\dfrac{h}{n}$, $\left(2r - 3\cdot\dfrac{h}{n}\right)3\cdot\dfrac{h}{n}$, $\cdots\left(2r - n\cdot\dfrac{h}{n}\right)n\cdot\dfrac{h}{n}$ *)

also, wenn $\mu$ die Masse der Cubikeinheit bezeichnet,

---

*) Da $CA$ die mittlere Proportionale zwischen $EC$ und $CD$ ist, so hat man $CA^2 = EC\,.\,CD = (2r - h)\,h$ u. s. w.

die Masse des ersten Cylinders $= \left[\left(2r - \frac{h}{n}\right)\frac{h}{n}\right]\pi \cdot \frac{h}{n} \cdot \mu,$

$= \left(2r - \frac{h}{n}\right)\left(\frac{h}{n}\right)^2 \pi\mu,$

„ „ „ zweiten „ $= \left(2r - 2\frac{h}{n}\right) 2\left(\frac{h}{n}\right)^2 \pi\mu,$

„ „ „ dritten „ $= \left(2r - 3\frac{h}{n}\right) 3\left(\frac{h}{n}\right)^2 \pi\mu,$

. . .

„ „ „ nten „ $= \left(2r - n\frac{h}{n}\right) n\left(\frac{h}{n}\right)^2 \pi\mu,$

also nach Aufgabe 12 das Trägheitsmoment

des ersten Cylinders $= \frac{1}{2}\left[\left(2r - \frac{h}{n}\right)\left(\frac{h}{n}\right)^2 \pi\mu\right]\left[\left(2r - \frac{h}{n}\right)\frac{h}{n}\right.$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3 \pi\mu\left[4r^2 - 4r\frac{h}{n} + \left(\frac{h}{n}\right)^2\right],$

„ zweiten „ $= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3 \pi\mu\left[2^2 . 4r^2 - 2^3 . 4r\frac{h}{n} + 2^4\left(\frac{h}{n}\right)^2\right.$

„ dritten „ $= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3 \pi\mu\left[3^2 . 4r^2 - 3^3 . 4r\frac{h}{n} + 3^4\left(\frac{h}{n}\right)^2\right.$

. . .

„ nten „ $= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3 \pi\mu\left[n^2 . 4r^2 - n^3 . 4r\frac{h}{n} + n^4\left(\frac{h}{n}\right)^2\right.$

Durch Addition erhält man

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3 \pi\mu\left[4r^2(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\right.$$
$$- 4r\frac{h}{n}(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$$
$$\left. + \frac{h^2}{n^2}(1 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)\right]$$
$$= \frac{1}{2}h^3\pi\mu\left[3r^2\frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\right.$$
$$- 4r\frac{h}{n}\cdot\frac{1}{n^4}(1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$$
$$\left. + h^2\cdot\frac{1}{n^5}(1 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)\right]$$
$$= \frac{1}{2}h^3\pi\mu\left(\frac{4r^2}{3} - \frac{4rh}{4} + \frac{h^2}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{30}h^3\pi\mu\,(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Es ist aber $M = (r - {}^1/_3 h)\, h^2 \pi \mu$, und daraus ergiebt sich ${}^1/_{30}\, h^3 \pi \mu = \frac{Mh}{30r - 10h}$, folglich nach Substitution dieses Ausdrucks

$$\mathfrak{M} = \frac{Mh}{30r - 10h}\,(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

**15.** Setzt man in die Formel der vorigen Aufgabe $2r$ statt $h$, so erhält man für die Kugel

$$\mathfrak{M} = {}^2/_5\, Mr^2.$$

**16.** Das Prisma hat ein Gewicht von $\frac{6 \,.\, 10}{2} \cdot 4 \,.\, 0{\cdot}007 = 0{\cdot}84$ Kg, also eine Masse von $\frac{0{\cdot}84}{9{\cdot}81}$ Masseneinheiten (siehe II., 5), folglich ist nach Aufgabe 9:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{24} \cdot \frac{0{\cdot}84}{9{\cdot}81}\,(12 \,.\, 10^2 + 6^2) = \frac{43{\cdot}26}{9{\cdot}81}$$ Masseneinheiten oder 43·26 Kg in der Entfernung eines Centimeters von der Drehaxe, d. h.: Eine Masse von $\frac{43{\cdot}26}{9{\cdot}81}$ Masseneinheiten oder 43·26 Kg, die in der Entfernung eines Centimeters von der Drehaxe in einem Punkt concentrirt wäre, würde vermöge ihrer Trägheit einer bewegenden Kraft den nämlichen Widerstand leisten, wie die Masse des Prismas in ihrer Vertheilung.

Gewöhnlich wird das Trägheitsmoment nur durch das Gewicht der Masse angegeben, die man sich in der Entfernung der zu Grunde gelegten Längeneinheit (hier 1 cm) angebracht denkt, also im vorliegenden Falle kurz so berechnet und ausgedrückt:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{24} \cdot 0{\cdot}84\,(12 \,.\, 10^2 + 6^2) = 43{\cdot}26 \text{ Kg}.$$

**17.** $\mathfrak{M} = \frac{43{\cdot}26}{10^2} = 0{\cdot}4326$ Kg (Lehrb. §. 51, 2, I).

**18.** Das Volum des Cylinders ist $= (0{\cdot}2)^2 \,.\, 3{\cdot}1416 \,.\, 0{\cdot}5 = 0{\cdot}062832$ cbm $= 62{\cdot}832$ cbdm, sein Gewicht also $= 62{\cdot}832 \,.\, 7{\cdot}2 = 452{\cdot}39$ Kg, folglich nach Aufgabe 12:

$\mathfrak{M} = {}^1/_2 \,.\, 452{\cdot}39 \,.\, (0{\cdot}2)^2 = 9{\cdot}0478$ Kg, oder $\frac{9{\cdot}0478}{9{\cdot}81}$ Masseneinheiten in der Entfernung eines Meters von der Drehaxe (vergleiche Aufgabe 16).

**19.** $Q = \frac{9{\cdot}0478}{(0{\cdot}2)^2} = 226{\cdot}195$ Kg.

**20.** Die Masse $M$ der Pendellinse wiegt 5·87823 Kg, und ihr Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gehende (geometr.) Axe ist (nach Aufg. 14) $= 0{\cdot}02902$ Kg in der Entfernung eines Meters von der Drehaxe, folglich ihr Trägheitsmoment in Beziehung auf eine mit jener parallele und um die Strecke $e = 0{\cdot}99$ m von ihr entfernte Axe (nach §. 51, 3 d. Lehrb.)

$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} + Me^2 = 0{\cdot}02902 + 5{\cdot}87823 \,.\, 0{\cdot}99^2 = 5{\cdot}79027$ Kg in der Entfernung eines Meters von der Drehaxe.

21. Das Trägheitsmoment des Radkranzes ist nach Aufgabe 13:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2\, G_1\, (R^2 + r^2),$$

das der sechs Radarme, wenn man sie bis zum Mittelpunkte rechnet, dafür aber die Nabe unberücksichtigt läßt (nach Aufgabe 11, b.)

$$\mathfrak{M}_2 = 6 \,.\, {}^1/_{12}\, G_2\, (b^2 + 4r^2);$$

folglich das gesuchte Trägheitsmoment

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = {}^1/_2\, G_1\, (R^2 + r^2) + 6 \,.\, {}^1/_{12}\, G_2\, (b^2 + 4r^2)$
$= 1\,186\,639$ Pfund in der Entfernung eines Fußes von der Drehaxe.

22. Die Länge des einfachen Pendels, das die gleiche Schwingungszeit wie das vorliegende zusammengesetzte Pendel hat, ist (nach §. 60, 1 d. Lehrb.) sowohl $= \frac{g\,T^2}{\pi^2}$, als auch, wenn $M$ die Masse des Körpers bezeichnet, $= \frac{\mathfrak{M}}{Me}$, und aus der Gleichsetzung dieser Ausdrücke findet sich $M = \frac{Mge\,T^2}{\pi^2}$ $= \frac{Qe\,T^2}{\pi^2}$.

---

## Auflösungen zu IX.

---

1. $t_1 : t_2 : t_3 = \sqrt{1} : \sqrt{4} : \sqrt{9} = 1 : 2 : 3.$
2. $l_1 : l_2 = 150^2 : 120^2 = 25 : 16.$
3. $t = 3{\cdot}1416 \sqrt{\frac{1}{9{\cdot}808}} = 1{\cdot}0031$ Secunden.
4. $l = \frac{9{\cdot}808 \,.\, 2{\cdot}5^2}{3{\cdot}1416^2} = 6{\cdot}212$ m.
5. $g = \frac{3{\cdot}1416^2 \,.\, 12{\cdot}6651}{2^2} = 31{\cdot}25$ Fuß $(= 9{\cdot}80792$ m).
6. $L_1 : L_2 = g_1 : g_2.$
7. $L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{\cdot}808}{3{\cdot}1416^2} = 0{\cdot}9937$ m $= 3{\cdot}166$ preuß. Fuß.
8. $\frac{l \,.\, n^2}{t^2 \,.\, 60^2} = \frac{1 \,.\, 239^2}{4^2 \,.\, 60^2} = 0{\cdot}992$ m.

9. Aus $\sqrt{4} : \sqrt{3 \cdot 168} = 60 : x$ folgt $x = \frac{60 \cdot 1 \cdot 78}{2} = 53 \cdot 4$.

10. $t = \sqrt{\frac{20 \cdot 12}{39 \cdot 14}} = 2 \cdot 5$ Secunden.

11. $l = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 39 \cdot 14 = 9 \cdot 785$ Zoll.

12. Bezeichnen wir die Anzahl der in 24 Stunden enthaltenen Secunden, nämlich 86 400, der Kürze wegen mit $N$, und die Anzahl der Schwingungen, welche das Pendel täglich weniger als $N$ macht, mit $n$, so hat man, da sich die Pendellängen umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen verhalten: $(L + d) : L = N^2 : (N - n)^2$ oder

$$\frac{L + d}{L} = \frac{N^2}{(N - n)^2} = 1 + \frac{2n}{N} + \cdots,$$

wenn man nämlich die höheren Potenzen von $\frac{n}{N}$ unberücksichtigt läßt. Daraus ergiebt sich $n = \frac{d \cdot N}{2L}$.

13. a. Bezeichnet $L_0$ die Länge des Secundenpendels am Aequator, $L_1$ diejenige am Pole, so erhält man die Anzahl $n$ der Schwingungen, welche das Pendel $L_0$ am Pole während 24 Stunden machen würde, aus der Proportion $n^2 : 86400^2 = L_1 : L_0$, nämlich $n = 86\,400 \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_0}}$, also nach Substitution der Werthe von $L_1$ und $L_0$ aus Tabelle 6 im Anhang:

$$n = 86\,400 \sqrt{\frac{3 \cdot 17388}{3 \cdot 15750}} = 86\,623,$$

also würde das Pendel $L_0$ am Pole 223 Schwingungen täglich mehr machen als am Aequator, die Uhr also um eben so viel Secunden, d. h. 3 Minuten 43 Secunden vorgehen.

b. Aus $L : (L - x) = N^2 : (N - n)^2$ folgt $x = \left(2 - \frac{n}{N}\right) \frac{n}{N} \cdot L$ $= 0 \cdot 002942$ m.

14. Die Schwingungsebene des Pendels dreht sich in 24 Stunden um $276 \cdot 341^0$, also in einer Stunde um $11 \cdot 5142^0$, und würde einen vollständigen Umlauf in $\frac{360}{11 \cdot 5142} = 31 \cdot 27$ Stunden machen.

15. In der Breite $\varphi$ ist die Länge des Secundenpendels, wenn man die dort stattfindende Beschleunigung der Schwere mit $g$ bezeichnet, $L = \frac{g}{\pi^2}$, unterm Aequator ist $L_0 = \frac{g_0}{\pi^2}$, woraus $L - L_0 = \frac{g - g_0}{\pi^2}$ folgt. Nun ist (nach der Auflösung zur Aufgabe 19 in VII.) $g - g_0 = f_0 \sin \varphi^2$, wo $f_0$ die Centrifugalbeschleunigung unterm Aequator bedeutet; folglich ist

$L - L_0 = \frac{f_0}{\pi^2} \sin \varphi^2$, oder $\frac{L - L_0}{\sin \varphi^2} = \frac{f_0}{\pi^2}$, wodurch die Behauptung bewiesen ist, da $f_0$ und $\pi$ constante Werthe sind.

**16.** Sind $L_1$, $L_2$ die beobachteten Längen der Secundenpendel am Niveau des Meeres unter zwei verschiedenen Breiten $\varphi_1$ und $\varphi_2$, so hat man die beiden Gleichungen: $L_1 = L_0 + B \sin \varphi_1^2$ und $L_2 = L_0 + B \sin \varphi_2^2$, woraus sich die beiden Unbekannten $L_0$ und $B$ ergeben:

$$B = \frac{L_1 - L_2}{\sin \varphi_1^2 - \sin \varphi_2^2} = \frac{L_1 - L_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \sin (\varphi_1 - \varphi_2)^*)}$$

$$= \frac{0{\cdot}0011}{\sin 109^0 35' 39'' \cdot \sin 11^0 55' 11''} = 0{\cdot}0056516 \text{ m},$$

$$L_0 = L_1 - \frac{L_1 - L_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \sin (\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \varphi_1^2$$

$$= 0{\cdot}99385 - 0{\cdot}00565 \, (\sin 48^0 50' 14'')^2 = 0{\cdot}99064 \text{ m}.$$

**17.** Für Berlin ist $L = 0{\cdot}99422$ m $= 3{\cdot}16778$ pr. Fuß.
„ Cassel „ $L = 0{\cdot}994117$ „ $= 3{\cdot}16745$ „ „
„ Hanau „ $L = 0{\cdot}994014$ „ $= 3{\cdot}16713$ „ „

**18.** Bezeichnen wir die Beschleunigung der Schwere am Meeresspiegel mit $g$, in der Höhe $h$ mit $g_1$, so erhalten wir aus

$$g_1 : g = r^2 : (r + h)^2, \; g_1 = g \frac{r^2}{(r + h)^2} = g \frac{r^2}{r^2 + 2hr + h^2}$$

$= g \left(1 - \frac{2h}{r} + \cdots\right)$, oder da wir in diesem Ausdruck die letzten Glieder ihrer Kleinheit wegen vernachlässigen können, $g_1 = g \left(1 - \frac{2h}{r}\right)$. Folglich hat man, weil $L : L_1 = g : g_1$,

$$L : L_1 = 1 : \left(1 - \frac{2h}{r}\right),$$

also $L_1 = L \left(1 - \frac{2h}{r}\right)$,

und nach Substitution der Werthe der Aufgabe:

$$L_1 = L \, (1 - {}^1/_{2032}) = 3{\cdot}1584 \text{ Fuß}.$$

**19.** Da $t = \pi \sqrt{\frac{x}{g}}$ und $T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$, der Bedingung der Aufgabe gemäß aber $2t = T$ ist, so ergiebt sich $x = l \cos \alpha$, oder wenn $\alpha$ sehr klein, $x = l$.

**20.** Bezeichnet $T$ die Zeit eines Umlaufs, so hat man

---

*) Es ist nämlich $\sin \varphi_1^2 - \sin \varphi_2^2 = (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$ $= 4 \sin {}^1/_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \cos {}^1/_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \cos {}^1/_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \sin {}^1/_2 (\varphi_1 - \varphi_2)$ $= \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \sin (\varphi_1 - \varphi_2)$.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, sowie auch $T = \frac{60}{n}$, und daraus ergiebt sich $h = \frac{60^2 g}{4\pi^2 n^2}$ $= \frac{3600 \,.\, 31{\cdot}25}{4 \,.\, 9{\cdot}8696 \,.\, n^2} = \frac{2849{\cdot}7}{n^2}$ preuß. Fuß.

21. Wenn $T$ die Umlaufszeit der Axe, also auch des Pendels bezeichnet, so hat man $w = \frac{2\pi}{T}$, und wenn $h$ die Höhe des von der Pendelstange gebildeten Kegels bezeichnet, $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen ergiebt sich $h = \frac{g}{w^2}$, folglich $x = l - \frac{g}{w^2}$.

22. Die reducirte Länge des zusammengesetzten Pendels ist $l = \frac{gt^2}{\pi} = \frac{9{\cdot}806 \,.\, 1{\cdot}5^2}{3{\cdot}1416^2} = 2{\cdot}2355$ m.

23. Das Trägheitsmoment der Stange, in Beziehung auf die Schwingungsaxe, ist $= {}^1/_3 Ml^2$, das statische Moment des im Schwerpunkt der Stange vereinigt gedachten Gewichts, auf dieselbe Axe bezogen, ist $= {}^1/_2 Ml$, also $L = \frac{{}^1/_3 Ml^2}{{}^1/_2 Ml}$ (Lehrb. §. 60, 1) $= {}^2/_3 l = 2$ m.

24. Das Trägheitsmoment der Kugel in Beziehung auf die Schwingungsaxe ist $= {}^2/_5 Mr^2 + Md^2$ (Lehrb. §. 51, 3), das statische Moment der Kugel $= Md$, also $x = \frac{{}^2/_5 Mr^2 + Md^2}{Md} = \frac{2r^2}{5d} + d = {}^1/_{360} + 36$ Zoll, also ist der Schwingungsmittelpunkt so wenig vom Mittelpunkt der Kugel entfernt, daß er damit zusammenfallend betrachtet werden kann.

25. $x = \frac{{}^2/_5 \,.\, 1{\cdot}5 \,.\, 1{\cdot}5 \,.\, 15^2 + 1{\cdot}5 \,.\, 13{\cdot}15^2 + {}^1/_3 \,.\, 0{\cdot}05 \,.\, 12^2}{1{\cdot}5 \,.\, 13{\cdot}15 + {}^1/_2 \,.\, 0{\cdot}05 \,.\, 12} = 13{\cdot}112$ Zoll,

$t = \pi\sqrt{\frac{13{\cdot}112}{g \,.\, 12}} = 0{\cdot}587$ Secunden.

26. Die Länge $L$ des gleichzeitigen einfachen Pendels erhält man, wenn $M_1 e_2 > M_2 e_2$ vorausgesetzt wird,

$$L = \frac{{}^1/_3 Ml_1^2 + {}^1/_3 Ml_2^2 + M_1 e_1^2 + M_2 e_2^2}{{}^1/_2 Ml_1^2 - {}^1/_2 Ml_2^2 + M_1 e_1 - M_2 e_2},$$

$$\text{also } t = \pi\sqrt{\frac{2}{3g} \cdot \frac{M(l_1^2 + l_2^2) + 3(M_1 e_1^2 + M_2 e_2^2)}{M(l_1^2 - l_2^2) + 2(M_1 e_1 - M_2 e_2)}}.$$

27. Bezeichnet M das Trägheitsmoment des Pendels, so ist die auf den Stoßpunkt $G$ reducirte Masse des Pendels, d. h. diejenige Masse, welche, im Punkte $G$ concentrirt, die nämliche Drehkraft zur Erzeugung einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit in Anspruch nehmen würde wie die Pendelmasse in ihrer Vertheilung, $= \frac{M}{a^2}$ (§. 51, 2 d. Lehrb.). Der Stoß der Kugel, die eine Masse

$= m$ und eine Geschwindigkeit $= x$ hat, auf das Pendel kann nun betrachtet werden, als ob er auf eine in $G$ befindliche ruhende Masse $\frac{\mathfrak{M}}{a^2}$ gerichtet wäre; alsdann berechnet sich die Geschwindigkeit des Punktes $G$ (nach §. 63, 3 a.) des Lehrb.) $= \frac{mx}{\frac{\mathfrak{M}}{a^2} + m} = \frac{ma^2x}{\mathfrak{M} + ma^2}$, folglich ist die Geschwindigkeit, welche der Schwingungsmittelpunkt $M$ im Anfang des von ihm beschriebenen Bogens $MO$ erhält,

$$= \frac{ma^2x}{\mathfrak{M} + ma^2} \cdot \frac{l}{a}.$$

Diese Geschwindigkeit wird durch die Arbeit der Schwerkraft während des Durchlaufens des Bogens $MO$ vernichtet, dann aber bei der Rückkehr von $O$ nach $M$ in entgegengesetzter Richtung wieder erzeugt, ihre absolute Größe ist also, da das vorliegende Pendel als ein einfaches Pendel von der Länge $l$ betrachtet werden kann, dessen schwerer Punkt die im Schwingungsmittelpunkte concentrirt gedachte Masse $\frac{\mathfrak{M}}{a^2} + m$ ist,

$$= \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} \text{ (Lehrb. §. 55).}$$

Aus der Gleichsetzung dieses und des obigen Ausdrucks findet sich nun die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel

$$\text{I.} \quad x = \frac{\mathfrak{M} + ma^2}{ma} \sqrt{\frac{2g}{l}} (1 - \cos\alpha).$$

Da aber $\mathfrak{M} + ma^2$ das Trägheitsmoment der Pendelmasse $M$ nebst der in dem Pendel stecken gebliebenen Kugelmasse $m$, auf die Drehaxe $C$ bezogen, ausdrückt, also (nach §. 60, 1 d. Lehrb.) $\frac{\mathfrak{M} + ma^2}{(M+m)e} = l$, folglich $\mathfrak{M} + ma^2 = (M + m)le$ ist, so erhält man nach der Substitution dieses Ausdrucks in I.

$$\text{II.} \quad x = \frac{M+m}{m} \cdot \frac{e}{a} \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}$$

$$= \frac{1439 + 3}{3} \cdot \frac{1{\cdot}32}{1{\cdot}4} \sqrt{2 . 9{\cdot}81 . 1{\cdot}5 (1 - \cos 15^0)}$$

$$= 453{\cdot}79 \text{ Meter.}$$

Wie vereinfacht sich der Ausdruck für $x$, wenn der Stoßpunkt mit dem Schwingungsmittelpunkt zusammenfällt?

# Auflösungen zu X.

1. Aus $10 \cdot 9 = 18 \cdot x$ folgt $x = 5$ m.

2. $c = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{80 \cdot 5 + 20 \cdot 8}{80 + 20} = 5^3/_5$ m.

3. $c = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{80 \cdot 5 - 20 \cdot 8}{80 + 20} = 2^2/_5$ m.

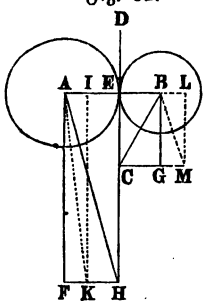
4. $c = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{80 \cdot 5}{80 + 20} = 4$ m.

5. $c_2 = c + \frac{M_1 (c - c_1)}{M_2} = 3 + \frac{150 (3 - 2)}{60} = 5^1/_2$ m.

6. Bezeichnet $x$ das Gewicht des ersten, $y$ das des zweiten Körpers, so hat man die beiden Gleichungen: $x + y = 200$ und $30 = \frac{x \cdot 80 - y \cdot 45}{200}$, woraus folgt: $x = 120$, $y = 80$ g.

7. Man zerlege (Fig. 31) die Geschwindigkeit der Kugel $A$ in zwei rechtwinkelige Seitengeschwindigkeiten, wovon die eine senkrecht auf die Berührungsebene von ($A$ nach $E$ zu), die andere parallel der Berührungsebene (von $A$ nach $F$ zu) gerichtet ist, nämlich in $75 \cdot \sin 25^0$ und $75 \cdot \cos 25^0$; ebenso die Geschwindigkeit der Kugel $B$ in die beiden Seitengeschwindigkeiten $40 \cdot \sin 36^0$ und $40 \cdot \cos 36^0$. Die Kraft, mit welcher $A$ gegen $B$ wirkt, ist also $= 6 \cdot (75 \cdot \sin 25^0) = 190{\cdot}17$, und die, mit welcher $B$ gegen $A$ wirkt, $= 4 \cdot (40 \cdot \sin 36^0) = 94{\cdot}048$, und aus beiden entsteht eine Geschwindigkeit beider Kugeln von $\frac{190{\cdot}17 - 94{\cdot}048}{10} = 9{\cdot}6122$ Fuß in der Richtung von $A$ nach $E$. Die Kugel $A$ wird also nach $E$ zu durch eine Kraft getrieben, die ihr die Geschwindigkeit $AI = 9{\cdot}6122$ Fuß, und von einer darauf rechtwinkeligen von $A$ nach $F$ zu wirkenden Kraft, die ihr die Geschwindigkeit $75 \cdot \cos 25^0 = 67{\cdot}9725$ Fuß ertheilt, woraus für $A$ eine Geschwindigkeit von $68{\cdot}65$ Fuß unter einem Winkel $AKI = 8^0 2' 56''$ gegen $CD$ folgt. — Ebenso erhält $B$ durch die beiden Kräfte, wovon ihr die eine in der Richtung von $B$ nach $L$ die Geschwindigkeit $9{\cdot}6122$ Fuß, die andere in der Richtung

Fig. 31.



von $B$ nach $G$ die Geschwindigkeit $40 \cdot \cos 36^0 = 32{\cdot}36$ Fuß ertheilt, die resultirende Geschwindigkeit von $33{\cdot}76$ Fuß unter einem Winkel $GBM = 16^0 32' 36{\cdot}6''$ abwärts von $DC$.

8. $v_1 = c_1 - \frac{2M_2(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = 20 - \frac{2 \cdot 40\,(20 - 12)}{30 + 40} = 10^6/_7$ dm;

$v_2 = c_2 + \frac{2M_1(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = 12 + \frac{2 \cdot 30 \cdot (20 - 12)}{30 + 40} = 18^6/_7$ dm;

beide Körper behalten ihre Richtung.

9. $v_1 = 20 - \frac{2 \cdot 100\,(20 - 2)}{30 + 100} = -\,7{\cdot}7$ dm.

$v_2 = 2 + \frac{2 \cdot 30\,(20 - 2)}{30 + 100} = 10{\cdot}3$ dm, also die stoßende Kugel erhält nach dem Stoß eine der ursprünglichen entgegengesetzte Richtung, während die gestoßene in ihrer Richtung bleibt.

10. $v_1 = c_1 - \frac{2M_2(c_1 + c_2)}{M_1 + M_2} = 15 - \frac{2 \cdot 32 \cdot (15 + 8)}{20 + 32}$

$= -\,13{\cdot}3$ Fuß;

$v_2 = -\,c_2 + \frac{2M_1(c_1 + c_2)}{M_1 + M_2} = -\,8 + \frac{2 \cdot 20 \cdot (15 + 8)}{20 + 32}$

$= 9{\cdot}7$ Fuß; beide Kugeln erhalten also durch den Stoß Richtungen, die der ursprünglichen entgegengesetzt sind.

11. $v_1 = 8$ Fuß, $v_2 = 20$ Fuß, d. h. die beiden Kugeln vertauschen ihre Geschwindigkeiten.

12. Aus Auflösung zu 8 oder 10 folgt für $c_2 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 8$ Fuß.

13. Aus den Formeln der Auflösungen zur 8. oder 10. folgt für $c_2 = 0$ die Geschwindigkeit

der zweiten Kugel $= \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$,

„ dritten „ $= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$,

„ vierten „ $= \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$,

„ $n$ten „ $= \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ cm,

„ 10ten „ $= 0{\cdot}13318$ m,

„ 100ten „ $= 23\,384\,670\,000$ m.

14. Aus den beiden Gleichungen $M_1 + M_2 = 75$ und $20 = 70 - \frac{2M_2(70 + 30)}{75}$ findet sich $M_1 = 56\frac{1}{4}$ Pfd., $M_2 = 18\frac{3}{4}$ Pfd., also $v_2 = -30 + \frac{2 \cdot 56\frac{1}{4} \cdot (70 + 30)}{75} = 120$ Fuß in einer der ursprünglichen entgegengesetzten Richtung.

15. Bei dem schiefen Stoß elastischer Körper muß die Bewegung eines jeden eben so wie bei den unelastischen, in eine gegen die Berührungsebene senkrechte und in eine mit dieser Ebene parallele zerlegt werden. In Beziehung auf $A$ sind diese Seitengeschwindigkeiten $30 \cdot \sin 16^0$ und $30 \cdot \cos 16^0$, für $B$ aber $12 \cdot \sin 24^0$ und $12 \cdot \cos 24^0$.

Die ersten Theile dieser Seitengeschwindigkeiten werden nach dem Stoß

für $A$, $v_1 = 30 \cdot \sin 16^0 - \frac{2 \cdot 7 \cdot (30 \cdot \sin 16^0 + 12 \cdot \sin 24^0)}{18 + 7}$,

für $B$, $v_2 = -12 \cdot \sin 24^0 + \frac{2 \cdot 18 \cdot (30 \cdot \sin 16^0 + 12 \sin 24^0)}{18 + 7}$.

Auf die zweiten Theile jener Seitengeschwindigkeiten hat der Stoß keinen Einfluß. Setzt man nun $v_1$ mit der darauf senkrechten Seitengeschwindigkeit $30 \cdot \cos 16^0$ zusammen, so findet man für $A$ die resultirende Geschwindigkeit $= 28{\cdot}85$ Fuß, und eben so durch Zusammensetzung von $v_1$ mit $12 \cdot \cos 24^0$ für $B$ die resultirende Geschwindigkeit $= 17{\cdot}82$ Fuß. Der Winkel, welchen die Richtung von $A$ nach dem Stoße mit der Berührungsebene macht, findet sich $= 1^0\,47'\,52''$ und der von $B = 127^0\,57'\,16''$.

16. Der Rammbär fällt mit einer Geschwindigkeit $= \sqrt{2 \cdot 31{\cdot}25 \cdot 5}$ = nahe $17{\cdot}7$ Fuß auf den Pfahl, die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der beiden Massen nach dem Stoße würde also, wenn kein Widerstand vorhanden wäre, $= \frac{1000 \cdot 17{\cdot}7}{1000 + 600}$ = nahe 11 Fuß sein. Die daraus hervorgehende Arbeit oder lebendige Potenz $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1600}{31{\cdot}25} \cdot 11^2$ Fußpfd. wird aber durch den Widerstand des Erdbodens beim Eindringen des Pfahls in denselben um $\frac{1}{80}$ Fuß vernichtet. Ist $x$ die Größe dieses Widerstandes, also gleich der Größe einer constanten Kraft, vermöge welcher die Masse des Rammbärs und des Pfahls von der Ruhe aus nach Zurücklegung eines Weges von $\frac{1}{80}$ Fuß eine Geschwindigkeit von 11 Fuß erlangen würde, folglich $x \cdot \frac{1}{80}$ ihre Arbeit, so muß $x \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1600}{31{\cdot}25} \cdot 11^2$ Fußpfd. sein, woraus $x = 247\,808$ Pfd. folgt, welches Gewicht die Belastung angiebt, die jetzt der Pfahl tragen kann, ohne tiefer einzusinken.

genau. = 250 000

(Theoretisch genauer hätte zu dem obigen Ausdruck für die Arbeit des Rammbärs und des Pfahls nach dem Stoße noch die Arbeit der Schwerkraft, welche auf diese Massen während des Eindringens um $\frac{1}{80}$ Fuß wirkt, als das Product $1000 \cdot \frac{1}{80}$ addirt werden müssen, wodurch sich $x = 247\,808 + 1600 = 249\,406$ Pfund ergeben hätte.)

# Auflösungen zu XI.

1. $f = \frac{18{\cdot}2}{52} = 0{\cdot}35.$

2. $P = 0{\cdot}06 \,.\, 400 = 24$ Kg.

3. $L = 0{\cdot}45 \,.\, 600 \,.\, 400 = 108\,000$ m=Kg.

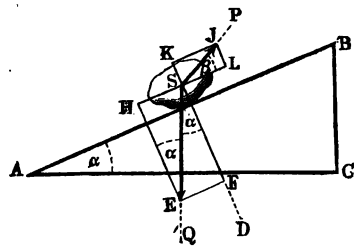
4. Die lebendige Kraft des Körpers, nämlich $\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,v^2$, wird durch die Arbeit der Reibung, nämlich $Gfx$ aufgezehrt; aus der Gleichung $\frac{1}{2} \,.\, \frac{19{\cdot}62}{9{\cdot}81} \,.\, 20^2 = 19{\cdot}62 \,.\, 0{\cdot}02 \,.\, x$ folgt also $x =$ nahe 1020 m.

5. a) $0{\cdot}07 \,.\, 200 = 14$ Pfd., wenn man $f = 0{\cdot}07$ nimmt,
   b) $2 \,.\, 1^3/_4 \,.\, 14 = 49$ Fußpfd. in der Secunde.

6. Der Kolbendruck an die Wand des Cylinders ist $= 3 \,.\, 60 \,.\, 18 = 3280$ Pfd., also, wenn man den Reibungs-Coefficienten von Metall auf Metall $= 1/8$ annimmt, die gesuchte Kraft $= 1/8 \,.\, 3280 = 410$ Pfd.

7. Zerlegt man (Fig. 32) ähnlich wie in Aufgabe 55 in V das Gewicht $Q$ und die Kraft $P$ jede in zwei Componenten, wovon die eine auf der schiefen Ebene senkrecht steht, die andere mit ihr parallel ist, so ergiebt sich der Druck $D$ welchen die schiefe Ebene erleidet, $= Q \cos\alpha - P \sin\beta$, folglich die Reibung $f\,(Q \cos\alpha - P \sin\beta)$. Soll nun a) der Körper bloß am Herabgleiten gehindert werden, so muß

Fig. 32.




$$P \cos\beta = Q \sin\alpha - f\,(Q \cos\alpha - P \sin\beta),$$

$$\text{also } P = Q\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\beta - f\sin\beta} = 201{\cdot}43 \text{ Kg sein.}$$

b) Soll aber der Körper aufwärts bewegt werden, so muß $P \cos\beta = Q \sin\alpha + f\,(Q \cos\alpha - P \sin\beta)$,

$$\text{also } P = Q\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\beta + f\sin\beta} = 407{\cdot}68 \text{ Kg sein.}$$

8. Da in diesem Fall der Winkel $\beta = -\alpha$ ist, so folgt aus der Auflösung der vorigen Aufgabe:

für a) $P = Q\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = Q\,\frac{tang\,\alpha - f}{1 + f\,tang\,\beta} = 175{\cdot}11$ Kg.

für b) $P = Q\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = Q\,\frac{tang\,\alpha + f}{1 - f\,tang\,\alpha} = 656{\cdot}33$ Kg.

Zusatz. Ist $h$ die Höhe und $b$ die Basis der schiefen Ebene, also $\frac{h}{b} = tang\,\alpha$, so ergiebt sich für a) $P = Q\,\frac{h - bf}{b + hf}$, für b) $P = Q\,\frac{h + bf}{b - hf}$.

9. Setzt man in der Formel $P = Q\,\frac{h + bf}{b - hf}$ (siehe Zusatz zur vorigen Auflösung) $b = 2\,r\,\pi$, so erhält man

$$P = 37{\cdot}07 \text{ Kg.}$$

10. a) $P = (f\,.\,cos\,\alpha + sin\,\alpha)\,.\,Q = (0{\cdot}48\,cos\,50^0 + sin\,50^0)\,.\,300 = 322{\cdot}5$ Kg.

b) $P = (sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha)\,.\,Q = (sin\,50^0 - 0{\cdot}48\,cos\,\alpha\,.\,300 = 91{\cdot}5$ Kg.

11. Den Reibungs-Coefficienten $f = 0{\cdot}075$ genommen, beträgt die Reibung $0{\cdot}075\,.\,20\,000 = 1500$ Pfd. Da der Radhalbmesser $\frac{12\,.\,12}{4} = 36$mal so groß ist als der Zapfenhalbmesser oder Hebelarm der Reibung, so ist die auf den Radumfang reducirte Zapfenreibung $= {}^{1500}/_{36} = 41{}^2/_3$ Pfd.

Der Zapfenumfang ist $= \frac{2\,.\,4\,.\,\pi}{12} = 2{\cdot}0944$ Fuß, also der Weg der Reibung während einer Secunde $= \frac{2{\cdot}0944\,.\,5}{60} = 0{\cdot}1745$ Fuß, und demnach die Arbeit der Reibung während einer Secunde $= 0{\cdot}1745\,.\,1500 = 261{\cdot}75$ Fußpfd.

12. Größe der Reibung $= f\,.\,Q = 0{\cdot}07\,.\,25\,000 = 1750$ Pfd., Geschwindigkeit des Zapfens in der Secunde $= \frac{d\,\pi\,n}{60} = \frac{8\,.\,3{\cdot}1416\,.\,6}{60}$ $= 0{\cdot}209$ Fuß. Verlorner Nutzeffect $= 0{\cdot}209\,.\,1750 = 366{}^1/_3$ Pfd.

13. a) Aus der Gleichung $P\,r_1 = Q\,r_1 + f\,(P + Q + G)\,r_2$ folgt

$$P = \frac{Q\,r_1 + f\,(Q + G)\,r_2}{r_1 - f\,r_2} = \text{nahe } 1018 \text{ Kg.}$$

b) Aus Tabelle 8 C. folgt die zur Ueberwindung der Steifigkeit des Seils erforderliche Kraft

$$= \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{r_1}\,Q = \frac{1}{2}\,\cdot\,\frac{0{\cdot}4^2}{1{\cdot}2}\,\cdot\,1000 = \text{nahe } 67 \text{ Kg,}$$

welche zu der in a) gefundenen Kraft zu addiren ist.

14. Nimmt man den Coefficienten der wälzenden Reibung für diesen Fall (nach de Pambour) $= {}^1/_{370}$, so ist

$P = {}^1/_{370}\,.\,20\,000 = 54$ Pfd.

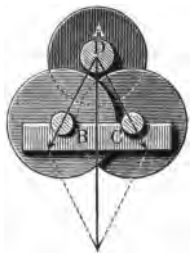
$L = Q\,s = Q\,.\,\frac{v^2}{2\,g} = (20\,000 + 54)\,.\,\frac{30^2}{2\,.\,31{\cdot}25} = 288\,778$ Fußpfd.

$L_1 = 54\,.\,30\,.\,60 = 97\,200$ Fußpfd.

**15.** Bezeichnet $f$ den bezüglichen Reibungs-Coefficienten, so ist, wenn das gewöhnlich geringe Gewicht der Frictionsrollen unberücksichtigt bleibt, die Zapfenreibung $= f \,.\, Q$ und ihr statisches Moment in Beziehung auf die Zapfenaxe $= f \,.\, Q \,.\, r$. Das statische Moment der Kraft $P$, welche in der Tangente der Frictionsrollen wirkt, ist aber in Beziehung auf die Zapfenaxe $= PR$, folglich $P \,.\, R = f \,.\, Q \,.\, r$, also $P = \frac{r}{R} \cdot f \,.\, Q$, also nur $\frac{r}{R}$ mal so groß, als diese Kraft sein müßte, wenn sie die gleitende Reibung unmittelbar zu überwinden hätte.

**16.** Zerlegt man (Fig. 33) den Druck $Q$ des Rades $A$ in zwei Seitendrücke nach den Zapfen der Frictionsräder, wovon jeder $= \frac{Q}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha}$, wenn man den Winkel $BDC$ mit $\alpha$ bezeichnet, so ist (nach Auflösung der vorigen Aufgabe) durch die Welle des Rades $A$ am Umfange des Rades $B$ die Kraft $\frac{r}{R} \cdot f \cdot \frac{Q}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha}$ zu überwinden und eben so viel am Umfange des Rades $C$. Es ist also die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft am Umfange der Welle des Rades $A$ $= \frac{r}{R} \cdot \frac{fQ}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$, während sie $f \,.\, Q$ betragen würde, wenn die Welle unmittelbar in einer Pfanne ruhte.

Fig. 33.




---

## Auflösungen zu XII.

---

**1.** $d = \frac{Df}{Pl} = \frac{1{\cdot}71 \,.\, 0{\cdot}34}{6{\cdot}72 : 1493} = 0{\cdot}0000566$ mm, also

$E = \frac{1}{d} = 17668$ Kg, d. h. dieses Gewicht würde einen Draht von der materiellen Beschaffenheit der Klaviersaite und beliebiger Länge, aber 1 qmm Querschnitt um die gleiche Länge ausdehnen, wenn der Draht so elastisch wäre wie etwa Gummielasticum.

**2.** $P = \frac{DfE}{l} = \frac{0{\cdot}5 \,.\, 0{\cdot}4 \,.\, 20\,800}{2000} = 2{\cdot}08$ Kg.

**3.** Der Festigkeitsmodul $K = \frac{1200}{150} = 8$.

4. Nach Tabelle 7 ist der Festigkeitsmodul $K$ des Messingdrahtes $= 50$, also ist $Q = 50 \,.\, 1{\cdot}227 = 61{\cdot}356$ Kg. Nimmt man, wie gewöhnlich, sechsfache Sicherheit, so ist das Gewicht, das er dauernd tragen kann, $= 10{\cdot}2$ Kg.

5. Nimmt man den Querschnitt, da dieser beliebig ist, zu 1 qmm an, so ist, da 1 cbmm Blei $0{\cdot}0114$ g wiegt, das Gewicht der Stange $0{\cdot}0000114 \,.\, l$ Kg, und dieses Gewicht muß dem Festigkeitsmodul $1{\cdot}25$ Kg (Tab. 7 A.) gleich sein. Daraus folgt $l = 1096{\cdot}5$ mm $= 1{\cdot}0965$ m.

6. Nimmt man den Sicherheitsmodul $S$ aus Tabelle 7 A., so erhält man aus $x^2 \,.\, 6{\cdot}5 = 2000$ $x = 17{\cdot}54$ mm.

7. Der Balken würde abgebrochen werden durch die Last $Q = K_1 \cdot \frac{b\,h^2}{l}$ (Tab. 7 B.) $= 150 \cdot \frac{18 \,.\, 20^2}{400} = 2700$ Kg, mit Sicherheit würde er also tragen 270 Kg.

8. a) In diesem Fall kann man sich die Last in dem Schwerpunkte des Balkens, also im Halbirungspunkte der Länge vereinigt denken, wo sie dann nur halb so stark wirkt, als am Ende; es muß also $\frac{1}{2} P = K_1 \frac{b\,h^2}{l}$ oder $P = 2\,K_1 \frac{b\,h^2}{l}$ sein, also ist die Tragkraft des Balkens doppelt so groß, wie im vorigen Fall, demnach 540 Kg.

b) Man muß $\frac{1}{2} Q$ statt $Q$ und $\frac{1}{2} l$ statt $l$ setzen, so daß $Q = 4\,K_1 \cdot \frac{b\,h^2}{l}$ wird. Folglich ist seine sichere Tragkraft 4mal so groß, als in Aufgabe 7, also 1080 Kg.

c) $Q = 8\,K_1 \cdot \frac{b\,h^2}{l}$; der Balken wird also in diesem Fall 8mal so viel tragen, als derselbe Balken unter den in Aufgabe 7 angenommenen Umständen, folglich 2160 Kg.

9. Aus der Formel in der Auflösung zu 8 b. folgt $4\,K_1 = \frac{Q\,l}{b\,h^2} = \frac{100{\cdot}8 \,.\, 98}{(2{\cdot}634)^3}$ $= 540{\cdot}5$, also $K = 135{\cdot}1$.

10. Aus der Formel $Q = 4\,K_1 \frac{b\,h^2}{l}$ (Aufl. zu 8 b.) und der Tab. 7 B. ergiebt sich die Brechungskraft $= 4 \,.\, 500 \cdot \frac{4 \,.\, 36}{300} = 960$ Kg und die frühere Tragkraft $= \frac{960}{4} = 240$ Kg.

11. Das Gewicht eines parallelepipedischen Getreidehaufens vom 80 dm Länge, $7{\cdot}5$ dm Breite und $x$ dm Höhe ist $80 \,.\, 7{\cdot}5 \,.\, x \,.\, 0{\cdot}8$ Kg $= Q$, also ist nach Auflösung zu 8 c., wenn man für $K_1$ den Sicherheitsmodul $\frac{1}{10} K_1 = 15$ setzt, $80 \,.\, 7{\cdot}5 \,.\, x \,.\, 0{\cdot}8 = 8 \,.\, 15 \cdot \frac{30 \,.\, 40^2}{800}$, woraus $x = 15$ dm.

# Auflösungen zu XIII.

1. a) 4·5 Kg. b) 4·5 . 1000 = 4500 Kg. c) 4·5 Gramme $= \frac{4 \cdot 5}{1000}$ = 0·0045 Kg.

2. 5 . 61·75 = 308·75 Pfd.; 5 . 1·07 = 5·35 Loth. (Genau erhält man für destillirbares Wasser von 15° R. Temperatur bezüglich 5 · 61·73785 = 308·68925 Pfd. und 5 . 1·071838 = 5·35919 Loth.)

3. 3 . 8 = 24 Kg.

4. 6 . 4 . 5 = 120 Kg.

5. $\frac{5^2 \cdot 3 \cdot 1416}{4} \cdot 20 = 392 \cdot 7$ Kg.

6. $\frac{6^2 \cdot 3 \cdot 1416}{4} \cdot 8 \cdot 61 \cdot 75 = 13\,968$ Pfd.

7. 1) 1·2 . 2·5 = 3 Kg.
   2) 3 . 2·8 = 8·4 Kg.

8. Bodendruck = 15 . 12 . 1·07 Loth = 6 Pfd. 12·6 Loth. Das Volumen des Wassers ist = $^{12}/_{3}$ $(15 + \sqrt{15 \cdot 10} + 10)$ = 149 Cubikzoll, sein Gewicht also nur 5 Pfd. 9·4 Loth, der Bodendruck also um 1 Pfd. 3·2 Loth größer.

9. 15 . 12 . 1·07 . 13·6 = 87 Pfd. 9·36 Loth.

10. 6 . 8 . $^{8}/_{2}$ = 192 Kg.

11. Der Druck auf den Boden ist = 5 . 3 . 8 = 120 Kg, der auf jede der breiteren Seitenwände = 5 . 8 . $^{8}/_{2}$ = 160 Kg, auf jede der schmäleren = 3 . 8 . $^{8}/_{2}$ = 96 Kg.

12. Das Wasser wird gar keinen Druck auf das Gefäß verursachen.

13. 1·6 . 100 = 160 g.

14. Der Schwerpunkt der gedrückten Fläche liegt 1·5 m unter der Oberfläche des Wassers, also ist der gesuchte Druck = 50 . 40 . 15 = 30 000 Kg = 600 Centner.

15. Die Höhe des Wassers ist = $\sqrt{5^2 - 1}$ = 4·9 dm, also ist der Bodendruck = 4 . 4·9 = 19·6 Kg. Der Schwerpunkt einer Seitenfläche liegt 2·222 dm . . . von der oberen Seite entfernt, woraus sich mittelst der Proportion 5 : 4·9 = 2·222 . . . : $x$ die Entfernung des Schwerpunktes von

der Oberfläche des Wassers = 2·178 dm ergiebt, daher der Druck auf die Seitenfläche, deren Inhalt = 15 □dm ist, = 15 . 2·178 = 32·67 Kg = 38·7 alte Loth.

16. Der Schwerpunkt der inneren Kugelfläche ist 1 dm von der Oberfläche des Wassers entfernt, also der Druck des Wassers = $\frac{4^2 \cdot 3{\cdot}14}{2} \cdot 1$ = 25·12 Kg. Das Gewicht des Wassers ist = $^2/_3 \cdot 2^3 \cdot 3{\cdot}14 = 16{\cdot}75$ Kg, also um 8·37 Kg kleiner als der Druck des Wassers.

17. 2 . 1·5 . 40 = 120 Kg.

18. $Q = 0{\cdot}25 \cdot (20 - 2) = 4{\cdot}5$ Kg.

19. $P = \frac{3^2 \cdot \pi}{4} \cdot 20 = 141{\cdot}37$ Kg.

20. Aus $5 \cdot 8 \cdot x - 4 \cdot 5 \cdot x = 20 \cdot (10 - x)$ folgt $x = 5$ dm.

21. Eine 2 . 13·6 cm hohe Wassersäule.

22. $P = \frac{Q \cdot d^2 \cdot l}{D^2 \cdot L} = \frac{3564 \cdot 1^2 \cdot 9}{9^2 \cdot 36} = 11$ Pfd.

23. $d = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^2 \cdot 4}{2000 \cdot 1}} = 2$ cm.

24. Das Grundwasser braucht immer einige Zeit, um durch die Erde hindurchzusickern, der höchste Stand des Wassers im Flusse bei seiner Anschwellung tritt aber gewöhnlich bald ein und dauert nur kurze Zeit.

25. Aus $h_1 : h_2 = d_2 : d_1$ oder $24 : h_2 = 1 : 1{\cdot}3$ folgt $h_2 = 31{\cdot}2$ mm.

---

## Auflösungen zu XIV.

1. a) 6 . 7·21 = 43·26 g.
   b) 6 . 7·21 . 1·07 = 46·29 g.
2. Aus $x \cdot 8 = 2{\cdot}4$ folgt $x = 0{\cdot}3$ cbdm.
3. Aus $x \cdot 19{\cdot}36 \cdot 1{\cdot}07 = 73$ folgt $x = 3{\cdot}52$ Cubikzoll.
4. $8 - \frac{8}{11{\cdot}4} = 7{\cdot}3$ Kg.
5. 61·75 . 2·5 − 61·75 = 92·625 Pfd.
6. 3 cbcm.
7. $^1/_3 \cdot 36 = 12$ Kg.

8. Aus $6 \cdot 4 \cdot x = 30$ folgt $x = 1{\cdot}25$ dm.

9. Aus $8 \cdot 5 \cdot x \cdot 1{\cdot}07 = 60$ folgt $x = 1{\cdot}4$ Zoll.

10. Ist $x$ Cubikfuß das Volum des verdrängten Wassers, so ist das Volum der gesamnten Eismasse $= 160\,000\,000 + x$ Cubikfuß, und beide Volume wiegen gleich viel. Nimmt man das Gewicht eines Cubikfußes Wasser $= 1$ an, so ist das Gewicht eines Cubikfußes Eis $= {}^9/_{10}$, und $160\,000\,000 + x$ Cubikfuß Eis wiegen ${}^9/_{10}$ $(160\,000\,000 + x)$ dieser Gewichtseinheiten, folglich muß $x = {}^9/_{10}$ $(160\,000\,000 + x)$, also $x = 1440$ Millionen Cubikfuß sein.

Oder: Die specifischen Gewichte des Wassers und des Eises verhalten sich wie 10 : 9. Bei gleichem absoluten Gewicht zweier Körper verhalten sich aber ihre Volume umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte, also $(160\,000\,000 + x) : x = 10 : 9$.

11. $30 - 0{\cdot}6 \cdot 30 = 12$ Kg.

12. $20 \cdot 40 \cdot 61{\cdot}75$ Pfd. $- 20 \cdot 300$ Pfd. $= 43\,400$ Pfd.

13. Ist $x$ das Gewicht des Bleies, $y$ das des Korkholzes, beide Zahlen auf dieselbe Gewichtseinheit bezogen, so ist

$\frac{x}{11{\cdot}35}$ das Gewicht des Wassers vom Rauminhalte des Bleies,

$\frac{y}{0{\cdot}24}$ „ „ „ „ „ „ „ Korkholzes.

Der Aufgabe gemäß muß aber das Gewicht der beiden verbundenen Körper der Summe dieser beiden Wassergewichte gleich sein,

$$\text{d. h. } x + y = \frac{x}{11{\cdot}35} + \frac{y}{0{\cdot}24},$$

$$\text{woraus } \frac{x}{y} = \frac{11{\cdot}35\,(1 - 0{\cdot}24)}{0{\cdot}24\,(11{\cdot}35 - 1)} = 3{\cdot}4726 \text{ folgt,}$$

d. h. das Gewicht des Bleies muß 3·4726mal so groß sein, als das des Korkholzes.

14. Nach voriger Auflösung 3·4726 Kg.

15. 1 cbdm des Menschen wiegt 1·1 Kg, ein Mensch von 65 Kg hat also ein Kolumen von $\frac{65}{1{\cdot}1} = 59{\cdot}09$ cbdm, er wiegt also im Wasser $65 - 59{\cdot}09 = 5{\cdot}91$ Kg. Dieses Gewicht muß demnach vom Kork getragen werden. Nun wiegt aber ein Cubikdecimeter Kork 0·24 Kg, er hat also einen Auftrieb von $1 - 0{\cdot}24 = 0{\cdot}76$ Kg. Ist $x$ das Volum des erforderlichen Korkstücks, so muß also $x \cdot 0{\cdot}76 = 5{\cdot}91$, folglich $x = 7{\cdot}776$ cbdm, also sein Gewicht $= 0{\cdot}24 \cdot 7{\cdot}776 = 1{\cdot}87$ Kg sein.

16. Wenn man das Gewicht der Cubikeinheit Wasser mit $\gamma$ bezeichnet, so ist das Gewicht der hohlen Kugel $= {}^4/_3 \pi\,(R^3 - r^3)\,\gamma\,s$ und jenes der verdrängten Flüssigkeit, wenn die Kugel bis zur Hälfte eintaucht, $= {}^2/_3 \pi \gamma R^3$. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Werthe folgt $R : r$

$= \sqrt[3]{2s} : \sqrt[3]{2s-1}$ oder, wegen $R = r + d$, $(r + d)\sqrt[3]{2s-1} = r\sqrt[3]{2s}$, woraus für die gegebenen Werthe von $d$ und $s$ folgt: $r = 22{\cdot}29$ Linien.

**17.** Das Gewicht der Holzkugel ist $= {}^4/_3\, r^3 \,.\, \pi \,.\, s \,.\, \gamma$, und eben so viel muß das verdrängte Wasser wiegen. Das Volumen des eingesenkten Theiles der Kugel ist $= {}^1/_3\, \pi h^2 (3r - h)$, wenn $h$ die Höhe dieses Kugelabschnittes bezeichnet, also das Gewicht des verdrängten Wassers $= {}^1/_3\, \pi h^2 (3r - h)\gamma$. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke folgt nun, wenn man für $r$ und $s$ die Werthe der Aufgabe setzt, die Gleichung $h^3 - 15h^2 + 200 = 0$ und daraus $h = 4{\cdot}33$ dm.

**18.** Das Gewicht des Zinns sei $= x$, das des Bleies $= y$, so erhält man aus den beiden Gleichungen $x + y = 7$ und $1053{}^1/_2\, x + 674{}^1/_3\, y = 6237, \ldots x = 4, y = 3$ Pfd.

**19.** Bezeichnet $x$ das Gewicht des Goldes, $y$ das des Silbers, so hat man die beiden Gleichungen

$$x + y = 20 \text{ und } \frac{x}{19{\cdot}26} + \frac{y}{10{\cdot}47} = 1{}^1/_4,$$

und daraus $x = 15{\cdot}14$ Pfd., $y = 4{\cdot}86$ Pfd.

**20.** Das Volumen des ersten Körpers ist $= \frac{Q}{s_1}$, das des zweiten $= \frac{x}{s_2}$, also das Volumen beider Körper $= \frac{Q}{s_1} + \frac{x}{s_2}$, es läßt sich daher das Gewicht beider Körper darstellen durch $\left(\frac{Q}{s_1} + \frac{x}{s_2}\right) s$, unmittelbar nach der Aufgabe aber auch durch $Q + x$. Man hat daher die Bestimmungsgleichung $\left(\frac{Q}{s_1} + \frac{x}{s_2}\right) s = Q + x$, woraus $x = \frac{s_2\,(s_1 - s)}{s_1\,(s - s_2)}\, Q$ folgt.

**21.** $x = \frac{0{\cdot}0013\,(1{\cdot}1 - 0{\cdot}6)}{1{\cdot}1\,(0{\cdot}6 - 0{\cdot}0013)} \,.\, Q = 0{\cdot}001\, Q$ (siehe vorige Aufg.).

# Auflösungen zu XV.

1. Aus $G = V \,.\, s \,.\, \gamma$ folgt $s = \frac{G}{V \,.\, 8} = \frac{1{\cdot}7}{0{\cdot}08 \,.\, 1} = 21{\cdot}25.$

2. $s = \frac{106}{40} = 2{\cdot}65.$

3. $s = \frac{145{\cdot}5}{10 \,.\, 1{\cdot}07} = 13{\cdot}6.$

4. a) Man bestimmt sein absolutes Gewicht $G$, sowie nach Aufgabe 6 in XIV. sein Volumen $V$, so hat man, wenn $\gamma$ das Gewicht der Volumeneinheit Wasser bedeutet, $s = \frac{G}{V\gamma}$.

   b) Man bestimmt sein absolutes Gewicht $G$, füllt dann ein Glasgefäß, das sich mittelst eines konisch eingeschliffenen Stöpsels dicht verschließen läßt (es ist gut, wenn der Stöpsel der Länge nach fein durchbohrt ist), mit Wasser, bestimmt das Gewicht $P$ dieses mit Wasser gefüllten Gefäßes, bringt dann jenen Körper in dasselbe, schließt wieder, wischt alles abfließende Wasser sorgfältig ab und wägt abermals. Ist jetzt das Gewicht $= P_1$, so ist das Gewicht des verdrängten Wassers $= G + P - P_1$, folglich $s = \frac{G}{G + P - P_1}$.

5. $s = \frac{P}{P - P_1} = \frac{161{\cdot}875}{62{\cdot}5} = 2{\cdot}59.$

6. Bezeichnet $p$ das Absolutgewicht des Bleies, so ist der Gewichtsverlust des Bleies im Wasser $= p - p_1$, der Gewichtsverlust der verbundenen Körper im Wasser $= P + p - \varphi$, folglich der Gewichtsverlust des zu bestimmenden Körpers im Wasser

$$= (P + p - \varphi) - (p - p_1) = P + p_1 - \varphi,$$

   also $s = \frac{P}{P + p_1 - \varphi}$.

7. $s = \frac{30}{30 + 110 - 15} = 0{\cdot}24.$

8. $s = \frac{38 - 2}{22 - 2} = 1{\cdot}8.$

9. Gewicht der 4 Drahtstücke . . . . . 1·613 g
„ des Gläschens mit Wasser . . . . . 31·981 „
Zusammen 33·594 g
Gewicht des Gläschens mit Wasser und Drähten . . . . 33·404 „
Gewicht des ausgeflossenen Wassers . . . . . 0·190 g.

Folglich das gesuchte specifische Gewicht $= \frac{1·613}{0·190} = 8·4805.$

10. $s = \frac{60}{45} = 1\frac{1}{3}.$

11. $I = 6·57 - 0·63 = 5·94$ cbdm.

12. Bezeichnen $p_1, p_2, p_3 \ldots$ die Gewichtsverluste der betreffenden Bestandtheile im Wasser, so hat man

$$s = \frac{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}.$$

Nun ist $p_1 = \frac{G_1}{s_1}$, $p_2 = \frac{G_2}{s_2}$, $p_3 = \frac{G_3}{s_3} \cdots$,

folglich $s = \frac{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots}{\frac{G_1}{s_1} + \frac{G_2}{s_2} + \frac{G_3}{s_3} + \cdots}$

$$= \frac{(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots)\, s_1\, s_2\, s_3 \ldots}{G_1\, s_2\, s_3 + G_2\, s_1\, s_3 + G_3\, s_1\, s_2 + \cdots}.$$

Für nur zwei Bestandtheile ist $s = \frac{(G_1 + G_2)\, s_1\, s_2}{G_1\, s_2 + G_2\, s_1}.$

13. $s = \frac{1·8}{0·51} = 3·53.$

14. a) Der Gebrauch der Gewichtsaräometer beruht darauf, daß sich die specifischen Gewichte ungleich dichter Flüssigkeiten zu einander verhalten, wie die absoluten Gewichte gleicher Volume, oder was dasselbe ist, wie die Gewichtsverluste, welche ein in sie versenkter Körper erleidet.

b) Der Gebrauch der Scalenaräometer beruht auf dem Satz, daß bei gleichem absoluten Gewicht zweier Körper ihre specifischen Gewichte sich umgekehrt verhalten, wie ihre Volumina.

15. $s = \frac{56 + 1·1}{56 + 16} = 0·793.$

16. Da die Flüssigkeitsmengen, welche ein und dasselbe Volumeter beim Eintauchen in verschiedene Flüssigkeiten verdrängt, stets dasselbe absolute Gewicht haben, so ergiebt sich aus 14 b) für die erste Flüssigkeit $s : 1 = 100 : 56$, also $s = {}^{100}/_{56} = 1·786$, d. h. man erhält das specifische Gewicht der Flüssigkeit, wenn man die Zahl, welche demjenigen Theilstriche entspricht, bis zu welchem das Volumeter einsinkt, in 100 dividirt. Für die drei anderen Flüssigkeiten erhält man beziehungsweise 1·25; 0·8; 0·714.

17. a) Um die Scala eines Volumeters für Flüssigkeiten, die specifisch schwerer sind als Wasser, zu verfertigen, taucht man das vollkommen cylindrische, unten verschlossene Glasrohr zuerst in Wasser und bezeichnet den Punkt, bis zu welchem es einsinkt, welchem Punkt dann später der Volumetergrad 100 beigeschrieben wird. Alsdann taucht man es in eine dichtere Flüssigkeit von bekanntem specifischen Gewicht und bemerkt gleichfalls den Einsenkungspunkt. Hat man als zweite Flüssigkeit z. B. concentrirte Schwefelsäure von 1·85 specif. Gewicht genommen, so gehört (nach der vorhergegangenen Aufgabe) dieser Stelle der Volumetergrad $\frac{100}{1{\cdot}85} = 54$ an, und der Raum zwischen den beiden bezeichneten Punkten muß in $100 - 54 = 46$ Theile getheilt werden, und diese Theilung kann nach Befinden auch noch über die Punkte fortgesetzt werden. Nimmt man als zweite Flüssigkeit eine Salzlösung von der Dichte $= 1{\cdot}33$, so entspricht dem Einsenkungspunkt die Zahl $\frac{100}{1{\cdot}85} = 75$, und man muß nun den Raum zwischen den beiden gefundenen Punkten in 25 gleiche Theile theilen. Diese Theilung wird gewöhnlich auf Papier aufgetragen, dieses dann in das oben offene Rohr hineingeschoben und so befestigt, daß die entsprechenden Striche der Theilung mit den beiden markirten Punkten des Rohrs zusammenfallen; alsdann wird das Rohr auch oben zugeblasen.

b) Um ein Volumeter bloß für leichtere Flüssigkeiten als Wasser zu verfertigen, kann man als zweite Flüssigkeit Weingeist von bekannter Dichte benutzen und gerade wie vorher verfahren. Man kann aber auch die Theilung ohne eine zweite Flüssigkeit in folgender Weise vornehmen. Nachdem man den Einsenkungspunkt im reinen Wasser bestimmt hat, befestigt man am oberen Ende der Röhre ein Gewicht, welches den vierten Theil von dem des Instrumentes beträgt. Dadurch sinkt die Röhre tiefer, und das Gewicht oder Volumen des im zweiten Fall verdrängten Wassers verhält sich zu dem Gewicht oder Volumen des im ersten Fall verdrängten wie 125 zu 100. Den oberen Einsenkungspunkt bezeichnet man nun mit 125 und theilt den Abstand der beiden Punkte in 25 gleiche Theile u. s. w.

---

## Auflösungen zu XVI.

1. a) $0{\cdot}03 \,.\, 20 \,.\, 3600 = 2160$ cbdm $= 2{\cdot}16$ cbm.

2. $v = \frac{720}{0{\cdot}03 \,.\, 3600} = 6{\cdot}66$ dm.

3. Wie $2^2 : (0{\cdot}66 \ldots)^2$, also wie 10 : 1.

4. $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g} \,.\, \sqrt{h} = 4{\cdot}43 \,.\, 3 = 13{\cdot}29$ m. — Bei Quecksilber hat $v$ dieselbe Größe wie bei Wasser.

5. Bezeichnet $v$ die Ausflußgeschwindigkeit, so ist nach Aufgabe 4, $v = \sqrt{2gh}$; aber wenn $x$ die Steighöhe bezeichnet, so muß auch $v = \sqrt{2gx}$ sein, folglich ist $x = h$, wobei die Reibungswiderstände und der Widerstand des zurückfallenden Wassers bei Seite gesetzt sind.

6. Bezeichnet $v$ die Ausflußgeschwindigkeit, so hat man (Aufgabe 18 in VI.)

$$x = \frac{v^2 \,.\, (sin\ 45^0)^2}{2g}, \quad y = \frac{v^2}{g}\ sin\ (2 \,.\, 45)^0,$$

oder, da im vorliegenden Fall $v^2 = 2gh$ ist,

$$x = \frac{2gh(\sqrt{1/2})^2}{2g} = \frac{h}{2}, \quad y = \frac{2gh}{g} = 2h.$$

7. Wegen der mit der Zeit zunehmenden Geschwindigkeit beim freien Falle müßte sich der Strahl, wenn keine Cohäsion der Wassertheilchen stattfände, in dünne Schichten zertheilen, die mit verschiedener Geschwindigkeit herabfielen; vermöge der Cohäsion der Wassertheilchen aber bleiben diese im Zusammenhang und der Strahl wird nur immer dünner, bis ihn endlich die tropfenbildende Kraft zerreißt.

8. Dieselbe Kraft, welche der Kolben ausübt, kann man auch durch eine Wassersäule ausüben lassen, deren Gewicht bei 1 □Zoll Querschnitt = 6 Pfd. ist. Die Höhe dieser Wassersäule findet sich aber $= \frac{6 \,.\, 144}{61{\cdot}75}$ $= 14$ Fuß, also ist die in Rechnung zu bringende Druckhöhe $= 2 + 14$ Fuß, also $v = \sqrt{2 \,.\, 31{\cdot}25 \,.\, 16} = 31{\cdot}62$ Fuß.

9. $V = a \,.\, t \,.\, v = a \,.\, t \,.\, \sqrt{2gh} = {}^2/_{144} \,.\, 10 \,.\, \sqrt{2 \,.\, 31{\cdot}25 \,.\, 3} = 1{\cdot}9$ Cubikfuß.

10. Die theoretische Wassermenge ist $= at\sqrt{2g} \,.\, \sqrt{h} = 0{\cdot}0003 \,.\, 60 \,.\, 4{\cdot}43 \,.\, 2 = 0{\cdot}15948$ cbm, also, da hier nach Tabelle 10 des Anhangs der Ausfluß-Coefficient $m = 0{\cdot}62$ ist, die wirkliche Wassermenge $= 0{\cdot}62 \,.\, 0{\cdot}15948 = 0{\cdot}0988$ cbm.

11. Für diesen Fall ist wieder der Ausfluß-Coefficient $m = 0{\cdot}62$, also die wirkliche Wassermenge

$$V = m \,.\, a \,.\, t\sqrt{2gh} = (m\sqrt{2g}) \,.\, at\sqrt{h} \quad \ldots \quad \text{(I.)}$$

oder, da $m\sqrt{2g} = 0{\cdot}62 \,.\, 7{\cdot}9 = 4{\cdot}9$ ist,

$$V = 4{\cdot}9\ at\sqrt{h} \quad \ldots \quad \text{(II.)}$$

also $V = 4{\cdot}9 \,.\, {}^5/_{144} \,.\, 3600 \,.\, \sqrt{4} = 1225$ Cubikfuß.

12. Aus Gleichung (I.) der vor. Auflös., oder, wenn man darin (aus Tab. 10) $m = 0{\cdot}82$, also $m\sqrt{2g} = 0{\cdot}82 \,.\, 7{\cdot}9 = 6{\cdot}48$ setzt, aus

$$V = 6{\cdot}48\ a\,t\,\sqrt{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III.)}$$

folgt $t = \dfrac{V}{6{\cdot}48\,a\,\sqrt{h}} = \dfrac{728}{6{\cdot}48\ .\ {}^{3}/_{288}\ .\ 3} =$ nahe 3600 Secunden.

13. Aus (III.) der vorhergehenden Auflösung folgt

$$\sqrt{h} = \frac{V}{6{\cdot}48\,a\,t} = \frac{800}{6{\cdot}48\ .\ {}^{2}/_{144}\ .\ 3600} = 2{\cdot}47,$$

also $h = 6{\cdot}1$ Fuß.

14. Nimmt man hier, weil nur an einer, nämlich an der oberen Seite Contraction stattfindet (aus Tabelle 10), $m = 0{\cdot}7$, so erhält man aus Formel (I.) der Auflösung zu 11, da hier $a = {}^{3}/_{2}$ □Fuß, $t = 1$ Secunde und $h = 3{\cdot}25$ Fuß ist, $V = 0{\cdot}7\ .\ 7{\cdot}9\ .\ {}^{3}/_{2}\ .\ \sqrt{3{\cdot}25} = 14{\cdot}93$ Cubikfuß.

15. Die mittlere theoretische Geschwindigkeit ist $= {}^{1}/_{2}\sqrt{2\,g\,h}$, folglich die wirkliche Ausflußmenge $= {}^{1}/_{2}\,m\,a\,t\,\sqrt{2\,g\,h}$, wo $m = 0{\cdot}62$, und da diese der vorhandenen Wassermenge $A\,h$ gleich sein muß, so hat man

$${}^{1}/_{2}\,m\,a\,t\,\sqrt{2\,g\,h} = A\,h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV.)}$$

woraus $t = \dfrac{2\,A\,\sqrt{h}}{m\,a\,\sqrt{2g}} = \dfrac{2\ .\ 6\ .\ 2}{0{\cdot}62\ .\ {}^{1}/_{144}\ .\ 7{\cdot}9} = 705{\cdot}6$ Secunden.

16. $$t_1 = \frac{2\,A}{m\,a\,\sqrt{2\,g}}\left(\sqrt{h} - \sqrt{h_1}\right)$$

$$= \frac{2\ .\ 6}{0{\cdot}62\ .\ {}^{1}/_{144}\ .\ 7{\cdot}9}\left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) = 95{\cdot}25 \text{ Secunden.}$$

17. a) Aus Formel (IV.) der Auflösung zu 15 folgt die Größe der Oeffnung

$$a = \frac{2\,A\sqrt{h}}{m\,t\,\sqrt{2g}} = \frac{2 : \frac{25}{4}\ \cdot\ 3{\cdot}1416\ .\ 1}{0{\cdot}62\ .\ 3600\ .\ 7{\cdot}9} = 0{\cdot}002227 \text{ □Zoll,}$$

woraus sich der Durchmesser dieser Oeffnung $= 0{\cdot}0532$ Zoll $= 0{\cdot}638$ Linien ergiebt.

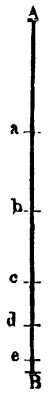
b) Behufs der Anfertigung der Scala ergiebt sich aus derselben Formel, daß sich bei einem und demselben Gefäß und derselben Ausflußmündung die Ausflußzeiten $t$ und $t_1$ wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen $h$ und $h_1$ verhalten, oder $t^2 : t_1^2 = h : h_1$. Setzen wir hiernach der Aufgabe gemäß $t = 60$ Minuten, $t_1 = 10$ Minuten, sowie $h = AB = 12$ Zoll (Fig. 32), so findet man die Höhe $h_1 = eB = \dfrac{10^2\ .\ 12}{60^2} = {}^{1}/_{3}$ Zoll und ebenso $dB = \dfrac{20^2\ .\ 12}{60^2} = {}^{4}/_{3}$ Zoll, $cB = 3$ Zoll, $bB = 5\,{}^{1}/_{3}$ Zoll, $aB = 8\,{}^{1}/_{3}$ Zoll.

18. In diesem Fall müssen die Flächeninhalte ($Q_1$, $Q_2$) des sinkenden Wasserspiegels in demselben Verhältniß abnehmen, wie die Ausflußgeschwindigkeiten

$(v_1, v_2)$, also wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen $(h_1, h_2)$, d. h. es muß $Q_1 : Q_2 = v_1 : v_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}$ sein, oder wenn $D_1$, $D_2$ die bezüglichen Durchmesser sind:

Fig. 32.

$$D_1 : D_2 = \sqrt[4]{h_1} : \sqrt[4]{h_2}.$$




19. Der erste genäherte Werth der Geschwindigkeit, also $v_1$, ist $= \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \,.\, 9{\cdot}81 \,.\, 4} = 8{\cdot}86$ m, also $\sqrt{v_1} = 2{\cdot}98$ m, folglich nach Substitution dieses Werthes in Gleichung (II.), $e = 0{\cdot}0176$, und wenn man diese Zahl in Gleichung (I.) einsetzt, erhält man den mehr genäherten Werth der Geschwindigkeit

$$v_2 = \frac{8{\cdot}86}{\sqrt{1 + 0{\cdot}0176 \cdot \frac{20}{0{\cdot}1}}} = 4{\cdot}17, \text{ daher } \sqrt{v_2} = 2{\cdot}04,$$

durch Substitution dieses Werthes in Gleichung (II.), $e = 0{\cdot}01903$, und endlich daraus mittelst der Gleichung (I.)

$$v = \frac{8{\cdot}86}{\sqrt{1 + 0{\cdot}01903 \cdot \frac{20}{0{\cdot}1}}} = 4{\cdot}04 \text{ m.}$$

Die in der Secunde ausfließende Wassermenge ist $= \frac{\pi d^2}{4} \cdot v = \frac{3{\cdot}1416 \,.\, (0{\cdot}1)^2}{4}$ $\cdot\, 4{\cdot}04 = 0{\cdot}03173$ cbm $= 31{\cdot}73$ l.

20. Die während einer Secunde gegen die Fläche bewegte Wassermenge hat ein Volumen von $f \,.\, c$ Cubikfuß, ihr Gewicht ist also $= fc\gamma$ Pfund, wo $\gamma$ das Gewicht der Cubikeinheit Wasser bezeichnet, und ihre Masse kann durch die Zahl $\frac{fc\gamma}{g}$ ausgedrückt werden. Während des unendlich kleinen Zeittheilchens $\tau$ kommt also eine Wassermenge zum Stoß, deren Masse $= \frac{\tau fc\gamma}{g}$ ist. Da nun diese Masse mit einer Geschwindigkeit $= c$ zur Fläche gelangt, so kann man diese Wirkung einer bewegenden Kraft zuschreiben, welche der Masse $\frac{\tau fc\gamma}{g}$ die Beschleunigung $\frac{c}{\tau}$ ertheilt, folglich ist diese Kraft oder die Stoßkraft $P = \frac{\tau fc\gamma}{g} \cdot \frac{c}{\tau} = \frac{c^2 f\gamma}{g} = \frac{10^2 \,.\, 2 \,.\, 61{\cdot}75}{31{\cdot}25} = 395{\cdot}2$ Pfd.

21. Der hydraulische Druck ist doppelt so groß als der hydrostatische, denn während der erstere $= \frac{c^2}{g} f\gamma = 2hf\gamma$, ist der letztere $= hf\gamma$.

22. Da in diesem Falle während einer Secunde nicht $cf$ Cubikfuß, sondern nur $(c - v)f$ Cubikfuß Wasser mit einer Geschwindigkeit von $c - v$ Fuß gegen die Fläche stoßen, so hat man

I. $P = (c - v)\frac{(c - v)f\gamma}{g} = \frac{(c - v)^2 f\gamma}{g} = \frac{(10 - 6)^2 \,.\, 2 \,.\, 31{\cdot}75}{31{\cdot}25}$

$= 63{\cdot}2$ Pfd.

Wenn aber, wie dies annähernd bei enggeschaufelten unterschlächtigen Mühlenrädern der Fall ist, kein Wassertheilchen ohne zu stoßen fortfließen könnte, weil die bewegliche Fläche jeden Augenblick durch eine andere mit jener in Verbindung stehende ersetzt würde, wenn also $cf$ Cubikfuß Wasser zum Stoße gelangen, aber mit einer Geschwindigkeit von $c - v$ Fuß die Fläche treffen würden, so würde man erhalten

II. $$P = (c - v)\frac{cf\gamma}{g} = (10 - 6) \cdot \frac{10 \,.\, 2 \,.\, 61{\cdot}75}{31{\cdot}25} = 158 \text{ Pfd.}$$

23. Aus Formel II. der vorigen Auflösung folgt für den vorliegenden Fall $P = \frac{(5 - 2) \,.\, 5 \,.\, (3 \,.\, 8) \,.\, 61{\cdot}75}{31{\cdot}25} = 711$ Pfd. Man kann diese Kraft auch so finden: Eine Kraft von 1 Pfd. ertheilt oder nimmt einer Masse von 1 Pfund während einer Secunde eine Geschwindigkeit von 31·25 Fuß, also ist, um einer Masse von 1 Pfd. eine Geschwindigkeit von 3 Fuß zu nehmen, eine Kraft von $\frac{3}{31{\cdot}25}$ Pfd. nöthig. Um also der Wassermasse von $5 \,.\, (8 \,.\, 3) \,.\, 61{\cdot}75 = 7410$ Pfd., welche während 1 Secunde zum Stoße gelangt, die Geschwindigkeit von 3 Fuß zu nehmen, ist eine Kraft von $7410 \cdot \frac{3}{31{\cdot}25} = 711$ Pfd. nöthig, und diese Kraft ist dem Druck des Wassers auf die Schaufel gleich, d. h. $= P$. Da nun die Kraft $P$ mit der Schaufel einen Weg von 2 Fuß in der Secunde zurücklegt, so ist die mechanische Arbeit oder Leistung des Rades oder $L = 711 \,.\, 2 = 1422$ Fußpfund.

Dieser Effect ist aber offenbar etwas zu groß, weil er unter der Voraussetzung berechnet wurde, daß alles Wasser mit seiner absoluten Geschwindigkeit zum Stoße gelange, was genau genommen nicht der Fall ist. Der Erfahrung gemäß muß man den eben gefundenen Werth der Leistung noch mit $^4/_5$ multipliciren.

---

## Auflösungen zu XVII.

1. a) $76 \times 13{\cdot}59 = 1032{\cdot}84$ g $= 1{\cdot}03284$ Kg.
   b) $28{\cdot}98 \,.\, 1{\cdot}07184 \,.\, 13{\cdot}59$ Loth $= 14{\cdot}07105$ Pfd.
2. a) $80 \,.\, 60 \,.\, 1{\cdot}033 = 4958{\cdot}4$ Kg.
   b) $(^{30}/_2)^2 \,.\, 3{\cdot}1416 \,.\, 1{\cdot}033 = 730{\cdot}2$ Kg.
   c) $4 \,.\, 3^2 \,.\, 3{\cdot}1416 \,.\, 10\,330 = 1\,168\,298$ Kg.

3. Im ersten Falle $144 . 14 . 14{\cdot}07 = 28365{\cdot}12$ Pfd., im zweiten $^{27}/_{28} . 28365{\cdot}12 = 27\,352$ Pfd.

4. $h = 28{\cdot}98 . 13{\cdot}6$ Zoll $= 32{\cdot}84$ Fuß.

5. $\frac{28{\cdot}98 . 13{\cdot}6}{0{\cdot}8}$ Zoll $= 41{\cdot}05$ Fuß; $\frac{28{\cdot}98 . 13{\cdot}6}{1{\cdot}8}$ Zoll $= 18{\cdot}24$ Fuß.

6. Mit einer Kraft von $50 . 1{\cdot}033 = 51{\cdot}65$ Kg wird die Platte durch die Luft ausgedrückt. Zieht man davon den Druck des Wassers, der $= 50 . 13 = 650$ g ist, ab, so erhält man den wirksamen Druck, mit welchem die Platte, abgesehen von ihrem Gewicht, gegen den Rand des Glases gedrückt wird, $= 51$ Kg.

7. $\frac{148}{32{\cdot}84} = 4^1/_2$ Atmosphären.

8. Etwas über 10 Atmosphärendrücke.

9. $28 . 13{\cdot}6 . 770 = 293\,216$ par. Zoll $= 24\,434^2/_3$ par. Fuß oder nahe eine deutsche Meile. Die so berechnete Höhe ist aber zu klein, weil die Dichte der Luft, dem Mariotte'schen Gesetz gemäß, in demselben Verhältniß abnimmt, in welchem die Höhe zunimmt.

10. Es sei, der Erdhalbmesser als Einheit angenommen, $x$ die Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkte der Erde, in welchem die für ein Lufttheilchen erforderliche Centripetalkraft seiner Schwerkraft gleich ist, so hat man, da die Centripetalbeschleunigung am Aequator an der Oberfläche der Erde nach Aufg. 15 in VII. $= 0{\cdot}108$ Fuß, im vorliegenden Falle also $x . 0{\cdot}108$ Fuß beträgt, die Beschleunigung der Schwere in jenem Punkte aber $\frac{31{\cdot}16}{x^2}$ Fuß ist, $x . 0{\cdot}108 = \frac{31{\cdot}16}{x^2}$ und daraus $x = 6{\cdot}6$, folglich ist die gesuchte Höhe $= 5{\cdot}6$ Erdhalbmesser.

11. Quecksilber ist $770 . 13{\cdot}6 = 10\,472$mal so dicht als die Luft von der Temperatur $0^0$ und bei dem Barometerstande von 28 par. Zoll, eine Quecksilbersäule von einer Linie Höhe wird also einer $10\,472$mal so hohen Luftsäule, d. h. einer Luftsäule von $\frac{10\,472}{144} = 72{\cdot}7$ Fuß das Gleichgewicht halten.

12. Denkt man sich die Atmosphäre in parallele Schichten von solcher Höhe getheilt, daß jede für sich einer Quecksilbersäule von einer pariser Linie das Gleichgewicht hält, so ruhen auf der untersten Luftschicht, die also 73 Fuß hoch ist, 335 solcher Schichten von gleichem Druck, auf der folgenden 334 u. s. w. Aus dem Mariotte'schen Gesetz folgt aber, wenn $x_2$, $x_3$ u. s. w. die Höhen der zweiten, dritten u. s. w. Luftschicht bezeichnen,

$x_2 : 73 = 336 : 335$, also $x_2 = \frac{336 \cdot 73}{335} = 73{\cdot}218$ Fuß.

Ebenso erhält man $x_3 = \frac{336 \cdot 73}{334} = 73{\cdot}437$ Fuß,

$x_4 = \frac{336 \cdot 73}{333} = 73{\cdot}658$ Fuß

u. s. w. Wäre also die Temperatur in allen Höhen dieselbe, so müßte man steigen:

$73 + 73{\cdot}218 = 146{\cdot}218$ Fuß, damit das Barom. um 2 Linien falle
$146{\cdot}228 + 73{\cdot}437 = 219{\cdot}655$ „ „ „ „ „ 3 „ „
$219{\cdot}655 + 73{\cdot}658 = 293{\cdot}313$ „ „ „ „ „ 4 „ „

13. Der anfängliche Druck auf die im kürzern Schenkel eingeschlossene Luft ist der der Atmosphäre, also gleich dem Drucke von 28 Zoll Quecksilberhöhe, wenn das Barometer zur Zeit des Versuchs gerade 28 Zoll hoch steht. Nach dem Hinzugießen von Quecksilber bis zu 18 Zoll Höhe im längeren Schenkel ist aber dieser Druck $= 28 + (18 - 4) = 42$ Zoll, die beiden Drücke verhalten sich also wie 28 : 42, d. h. wie 2 : 3. Dagegen verhält sich das anfängliche Volumen der Luft im kurzen Schenkel zu dem, welches sie jetzt einnimmt, wie 12 : (12 — 4) oder wie 3 : 2. Also verhalten sich die Luftvolumina umgekehrt, wie die Drücke.

Durch Hinzugießen von Quecksilber in den längeren Schenkel bis zu 34 Zoll wird der Druck $= 28 + (34 - 6) = 56$ Zoll, der vorige Druck von 42 Zoll verhält sich also zu diesem, wie 3 : 4. Dagegen nimmt der Luftraum in dem Verhältniß von (12 — 4) : (12 — 6), d. h. wie 4 : 3, ab, also verhalten sich diese Volumina gleichfalls umgekehrt, wie die drückenden Kräfte.

Ebenso findet man den Druck bei 34 Zoll Quecksilberhöhe im kürzeren Schenkel zu dem bei 93 Zoll, wie 4 : 8, dagegen die entsprechenden Luftvolumina wie 8 : 4.

Während also die Druckkräfte wie 2 : 3 : 4 : 8 zunehmen, nehmen die Volumina ab wie 12 : 8 : 6 : 3, oder: die von einer und derselben Luftmenge eingenommenen Volumina verhalten sich unter sonst gleichen Umständen umgekehrt, wie die auf sie wirkenden Druckkräfte.

14. Bis zu einer Höhe von $28 + 6 = 34$ Zoll.

15. Bezeichnet $x$ die Quecksilberhöhe im kurzen Schenkel, so ist der Druck auf die in diesem Schenkel befindliche Luft $= 28 + 24 - x$ Zoll, man hat also nach dem Mariotte'schen Gesetz die Proportion $28 : (28 + 24 - x) = (12 - x) : 12$ oder $x^2 - 64x + 288 = 0$, folglich $x = 4\frac{5}{6}$ Zoll. Das Volumen der Luft im verschlossenen Schenkel beträgt also im vorliegenden Fall $\frac{12 - 4\frac{5}{6}}{12} = \frac{43}{72}$ des ursprünglichen Volumens.

16. Aus der Gleichung $l : (L - x) = (B - x) : B$ folgt nach Einsetzung der gegebenen Werthe $x^2 - 68\,x + 756 = 0$, und daraus $x = 14$ Zoll; es nimmt also die Luft einen Raum von $40 - 14 = 26$ Zoll, d. h. den doppelten Raum wie vorher ein.

17. Aus den beiden Gleichungen $l : y = (B - x) : B$ und $x + y = l_1$ folgt:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(l_1 + B - \sqrt{(l_1 + B)^2 + 4\,(l - l_1)\,B}\right) = 10{\cdot}8 \text{ Zoll},$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left(l_1 - B + \sqrt{(l_1 + B)^2 + 4\,(l - l_1)\,B}\right) = 21{\cdot}2 \text{ Zoll}.$$

In den besonderen Fällen:

a) wenn $l_1 = l$, wird $x = 0$, $y = l = l_1$;

b) wenn $l_1 = L$, so fällt die Aufgabe mit der vorigen zusammen und man erhält $x = 14$, $y = 26$ Zoll;

c) wenn $l_1 = B$, so wird $x = B - \sqrt{Bl}$, $y = \sqrt{Bl}$, d. h. die Länge der Luftsäule im Glasrohr ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Barometerhöhe und der anfänglichen Länge der Luftsäule.

18. Aus $l : nl = (B - x) : B$ folgt $x = \dfrac{B(n-1)}{n} = 506^2/_3$ mm, also $l_1 = x + nl = 506^2/_3 + 240 = 746^2/_3$ mm.

19. Aus $V : V_1 = B_1 : B$ folgt $V_1 = \dfrac{V.B}{B_1} = \dfrac{2\,.\,27}{28} = 1{\cdot}93$ l.

20. Aus $V : 1{\cdot}9 = (725 - 5) : 760$ folgt $V = 1{\cdot}8$ l.

21. Nach dem Mariotte'schen Gesetz verhalten sich die Druckkräfte, welche auf gleiche Gasmengen wirken, umgekehrt, wie die Volumina, die diese einnehmen, also direct, wie die Dichten derselben, woraus folgt, daß sich die Barometerhöhen in den verschiedenen Luftschichten wie die Dichten dieser Schichten verhalten. Denkt man sich nun eine Luftsäule in parallele Schichten von gleichen, aber so geringen Höhen getheilt, daß innerhalb jeder derselben die Dichte als gleichförmig betrachtet werden kann, und bezeichnet man die Dichten der auf einander folgenden Schichten mit $d_1, d_2, d_3 \ldots$, die der Expansivkraft derselben entsprechenden Barometerstände mit $b_1, b_2, b_3 \ldots$, sowie ihre absoluten Gewichte mit $q_1, q_2, q_3 \ldots$, so hat man

$$b_1 : b_2 = d_1 : d_2;\ b_2 : b_3 = d_2 : d_3 \text{ u. s. w.}$$

also auch, weil wegen der Gleichheit der Luftvolumina sich verhält

$$d_1 : d_2 = q_1 : q_2;\ d_2 : d_3 = q_2 : q_3 \text{ u. s. w.},$$
$$b_1 : b_2 = q_1 : q_2;\ b_2 : b_3 = q_2 : q_3 \text{ u. s. w.}$$

Denken wir uns nun die Luftsäule von demselben Durchmesser, wie die Quecksilbersäule im Barometer, so ist

$q_1$ = dem Gewichte der Quecksilbersäule $b_1 - b_2$,
$q_2$ = „ „ „ „ $b_2 - b_3$ u. s. w.,

also $b_1 : b_2 = (b_1 - b_2) : (b_2 - b_3)$; $b_2 : b_3 = (b_2 - b_3) : (b_3 - b_4)$ u. s. w., folglich nach arithmetischen Gesetzen

$$b_1 : b_2 = b_2 : b_3;\ b_2 : b_3 = b_3 : b_4 \text{ u. s. w.,}$$

d. h. die Glieder $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ ... bilden eine geometrische Reihe, während die Höhen immer um 1 fortschreiten, also eine arithmetische Reihe bilden.

Da nun in einer geometrischen Reihe alle gleichweit von einander abstehenden Glieder selbst wieder eine geometrische Reihe bilden, so gilt das Gesetz auch für beliebig große, aber gleiche Höhenzunahmen.

22. Der vorhergehenden Aufgabe gemäß, bilden diese Barometerstände die Glieder einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied = 336 und deren zweites Glied 335, deren Exponent also $\frac{335}{336}$, so daß also die Reihe selbst ist:

$$336,\ 336 \cdot \frac{335}{336},\ 336 \cdot \left(\frac{335}{336}\right)^2,\ \ldots\ 336 \cdot \left(\frac{335}{336}\right)^n.$$

23. Aus $336 \cdot \left(\frac{335}{336}\right)^n = 324$ (siehe vorhergehende Aufgabe) folgt

$$n = \frac{log\ 336 - log\ 324}{log\ 336 - log\ 335},$$

also $H = n \cdot 73 = \frac{73}{log\ 336 - log\ 335}\ (log\ 336 - log\ 324)$

oder $H = 56\,154 \cdot (log\ 336 - log\ 324) = 886{\cdot}67$ par. Fuß.

24. Aus voriger Auflösung folgt $H = 56\,154\ (log\ 336 - log\ {}^1/_{100})$ $= 254\,172$ par. Fuß $= \frac{254\,172}{22\,805} = 11{\cdot}15$ geographische Meilen.

25. Aus $336 \cdot \left(\frac{335}{336}\right)^m = B$ und $336 \cdot \left(\frac{335}{336}\right)^n = b$ folgt

$$n - m = \frac{log\ B - log\ b}{log\ 336 - log\ 335},$$

also $H = (n - m) \cdot 73 = \frac{73}{log\ 336 - log\ 335}\ (log\ B - log\ b)$

oder $H = 56\,154 \cdot (log\ B - log\ b)$ par. Fuß, eine Formel, welche zuerst von Tobias Mayer in der Form $H = 60\,000\ (log\ B - log\ b)$ par. Fuß aufgestellt worden ist. Deluc, nach welchem diese Formel gewöhnlich benannt wird, hat durch Erfahrung gefunden, daß sie nur bei 17° R. ein ziemlich genaues Resultat giebt, und hat überhaupt zuerst auf die Nothwendigkeit aufmerksam gemacht, bei Höhenmessungen auch die Verschiedenheit der Temperatur zu berücksichtigen.

26. Aus der Formel ergiebt sich folgende Rechnung mit Hülfe einer fünfstelligen Logarithmentafel:

Man hat im vorliegenden Fall $C = 56588$

$399 + T + t = 417{\cdot}5$

wodurch nach Auflösung $b$, der Aufgabe 23 in XX. (darin $B$ und $b$ statt $x$ gesetzt) die beobachteten Barometerstände auf $0^0$ R. reducirt sind.

$\log B = 1{\cdot}43409 - 0{\cdot}00153$

$\log b = 1{\cdot}29765 - 0{\cdot}00032$

$\log B - \log b = 0{\cdot}13644 - 0{\cdot}00121 = 0{\cdot}13523.$

Nun ist $\log C = 4{\cdot}75272$

$\log (339 + T + t) = 2{\cdot}62066$

$compl\ log\ 399 = 7{\cdot}39903 - 10$

$\log (\log B - \log b) = 9{\cdot}13108 - 10$

$3{\cdot}90349$

Correction wegen der geographischen Breite $\varphi \ldots + 8$ *)

folglich $\log H = 3{\cdot}90357$

$H = 8009$ par. Fuß.

27. $H = 721{\cdot}65$ par. Fuß.

28. Der Wasserdampf der Atmosphäre übt in seiner Gasform gleichfalls einen Druck auf das Barometer aus, der sich also zu dem Druck der reinen atmosphärischen Luft addirt. Wird nun der Wasserdampf durch irgend eine Ursache verdichtet und geht in Regen über, so wird der Druck geringer und das Barometer muß fallen.

29. In der Regel sinkt das Barometer in einer Gegend, wenn diese Gegend wärmer wird, als die Umgebung, also die Luftsäule dieser Gegend ausgedehnt wird und zum Theil auf die kältere und niedrigere Umgebung überfließt. Umgekehrt rührt das Steigen des Barometers in der Regel von dem Kälterwerden dieser Gegend her.

30. Nimmt man den Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe auf den Quadratcentimeter $= 1{\cdot}033$ Kg an, so folgt aus $760 : (730 + 570) = 1{\cdot}033 : x$ der Werth von $x = 1{\cdot}767$ Kg.

31. Mit ungefähr 3 Atmosphären.

32. Die Höhe der Quecksilbersäule, welche der Expansivkraft der Luft im Manometer entspricht, wenn das Quecksilber in demselben $h$ Zoll hoch steht, findet sich dem Mariotte'schen Gesetze gemäß

$$= \frac{l}{l - h} \cdot b,$$

*) Der Factor $1 + 0{\cdot}0026\ cos\ 2\varphi$ der Formel ist hinreichend berücksichtigt, wenn man für jeden Breitengrad über oder unter $45^0$ von der Summe der Log. der übrigen Factoren 0·00004 abzieht oder dazu addirt.

also die Höhe der Queckſilberſäule, welche der Expanſivkraft des Dampfes entſpricht, $H = h + \frac{l}{l-h} \cdot b = 352 + \frac{677}{325} \cdot 760 = 1935$ mm,

folglich $D = \frac{1935}{760} \cdot 1{\cdot}033 = 2{\cdot}63$ Kg.

33. In dieſem Falle findet man (aus der vorigen Auflöſung und aus Aufgabe 45 in XX.) die Höhe der Queckſilberſäule, welche der Expanſivkraft der Luft im Manometer entſpricht,

$$= \frac{l}{l-h} \cdot \frac{1 + 0{\cdot}00367 \cdot t_1}{1 + 0{\cdot}00367 \cdot t} \cdot b,$$

alſo, wenn man die Queckſilberhöhe, welche der Expanſivkraft des Gaſes, womit das Manometer in Verbindung gebracht iſt, mit $H$ bezeichnet,

$$H = h + \frac{l}{l-h} \cdot \frac{1 + 0{\cdot}00367\, t_1}{1 + 0{\cdot}00367\, t} \cdot b$$

$$= 352 + \frac{677}{325} \cdot \frac{1 + 0{\cdot}00367 \cdot 21}{1 + 0{\cdot}00367 \cdot 10} \cdot 760 = 1997 \text{ mm}.$$

34. Bezeichnen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Luftdichten nach 1, 2, ... $n$ Kolbenzügen, ſo hat man, da ſich die Dichtigkeiten der Körper bei gleicher Maſſe umgekehrt wie ihre Volumina verhalten, nach dem erſten Kolbenzug

$$x_1 : d = b : (a + b), \text{ alſo } x_1 = \frac{b}{a+b} \cdot d.$$

Ebenſo nach dem zweiten Kolbenzug

$$x_2 : x_1 = b : (a + b), \text{ alſo } x_2 = \frac{b}{a+b} \cdot x_1 = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot d,$$

und nach dem $n$ten Kolbenzug $x_n = \left(\frac{b}{a+b}\right)^n \cdot d.$

Für $d = 1$ wird $x_n = \left(\frac{b}{a+b}\right)^n$.

35. $x = \left(\frac{2{\cdot}8}{0{\cdot}7 + 2{\cdot}8}\right)^8 = 0{\cdot}8^8 = 0{\cdot}1678.$

36. Bezeichnet $x$ die Anzahl der Kolbenzüge, ſo folgt aus $^1/_{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ der Werth $x = \frac{log\ 10}{log\ 5 - log\ 4} = 10{\cdot}3.$

37. Die Dichte der Luft unter dem Recipienten verhält ſich in dieſem Falle zur Dichte der äußeren Luft, wie 2 : 332 oder wie 1 : 166, es hat alſo eine 166fache Luftverdünnung ſtattgefunden.

38. Wie (330 — 300) : 330, d. h. wie 1 : 11.

39. Es ſeien $E$ und $E_1$ die (z. B. durch die Queckſilberhöhen eines mit dem Recipienten in Verbindung ſtehenden Barometers gemeſſenen) Expanſivkräfte der Luft im Recipienten vor und nach dem erſten Kolbenzug, ſo hat

man $E : E_1 = (a + x) : x$, also $x = \frac{E_1}{E - E_1} a$. Zur Controle kann man das Verfahren wiederholen.

40. Bezeichnen wieder $E$ und $E_1$ die Expansivkraft der Luft im Recipienten vor und nach dem ersten Kolbenzuge, so hat man

$$E : E_1 = (a + b + x) : (b + x),$$
$$\text{also } x = \frac{E_1 (a + b) - E b}{E - E_1}.$$

41. Der Druck der Atmosphäre auf den Kolben beträgt $3 . 15 = 45$ Pfd. Auf der anderen Seite des Kolbens beträgt aber der Druck nur $^1/_{336} . 45 = 0{\cdot}134$ Pfd., der beim Aufziehen des Kolbens zu überwindende Druck ist also, die Reibung ungerechnet*), $= 45 - 0{\cdot}134 = 44{\cdot}866$ Pfd.

42. Der Kolben hat eine Durchschnittsfläche von 176 □Zoll engl., also ist der auf ihn wirkende mittlere atmosphärische Druck $= 176 . 14$ engl. Pfund, folglich der nach Abzug des Gegendrucks u. s. w. noch wirksame Druck $= ^3/_5 . 176 . 14 = 1478$ Pfd., woraus

$$x = \frac{1478}{8} = 185 \text{ Tonnen folgt.}$$

43. Jede der beiden Halbkugeln wurde mit einer Kraft gegen die andere gedrückt, die sich ergiebt, wenn man 15 Pfd. mit dem Flächeninhalt des größten Kreises der Kugel, in Quadratzollen ausgedrückt, multiplicirt, also mit $11^2 . 3{\cdot}1416 . 15 = 5702$ Pfd.

44. Daß ein Körper in der Luft eben so viel an Gewicht verliert, als die Luft wiegt, die er verdrängt.

45. $\frac{q_1 - q_2}{^4/_3 r^3 \pi} = \frac{3 . (349{\cdot}321 - 333{\cdot}975)}{4 . 14{\cdot}13 . 3{\cdot}14159} = 0{\cdot}001307\ g$ wiegt ein Cubikcentimeter, also $1{\cdot}307\ g$ ein Liter Luft (den genaueren Werth siehe in Tabelle 5).

46. Bis zur Dichte $\frac{v}{V} d$.

47. Aus $d_1 : d = (B + nA) : B$ folgt

$$d_1 = \frac{B + nA}{B} \cdot d.$$

48. Es müssen noch $10 . 36 - 36 = 324$ Cubikzoll von der anfänglichen Dichte in den Recipienten gepumpt werden, und dies geschieht durch $\frac{324}{12} = 27$ Kolbenstöße.

49. Die ursprünglich in dem Kolben enthaltene Luft würde, wenn sie sich

*) Reibung des Kolbens siehe Aufgabe 10 in XI.

bis zur Dichte der Atmosphäre beim Barometerdruck = 28 Zoll ausdehnen könnte, ein Volumen von 8 . 40 Cubikzoll einnehmen. Die aus dem Kolben ausgetretene Luft würde unter dem Drucke von 28 Zoll ein Volumen von $\frac{27{\cdot}3}{28}$ . 80 Cubikzoll einnehmen, also würde die noch in dem Kolben gebliebene Luft unter dem Drucke von 28 Zoll einen Raum von $8{\cdot}40 - \frac{27{\cdot}3}{28}$ . 80 = 242 Cubikzoll einnehmen, folglich ist ihre Expansivkraft $\frac{242}{40}$, d. h. 6·05mal so groß als die Expansivkraft der Atmosphäre bei einem Barometerdruck von 28 Zoll.

50. Bis zu 32·84 Fuß Höhe (siehe Aufgabe 4); gewöhnlich wird aber das Saugrohr nur 10 bis 14 Fuß lang gemacht, weil die Kolben nicht luftdicht schließen.

51. Bezeichnet $H$ die Höhe einer Wassersäule, welche dem atmosphärischen Drucke das Gleichgewicht hält, und ist $x$ die Entfernung des Kolbens von der Ausgußöffnung bei irgend einer Stellung desselben, $y$ die Entfernung des Kolbens vom Wasserspiegel, also $x + y = h$ die Entfernung der Ausgußöffnung vom Wasserspiegel, so drückt auf den Kolben nach unten eine Wassersäule von der Höhe $H + x$, nach oben eine Wassersäule von der Höhe $H - y$, folglich ist der resultirende Druck auf den Kolben nach unten der einer Wassersäule vom Volumen = $a\,(H + x - H + y) = a\,(x + y) = a\,.\,h$, also vom Gewicht $a\,h\,\gamma$, wenn $\gamma$ das Gewicht einer Volumeinheit Wasser bezeichnet. Folglich ist $P = a\,h\,\gamma$ und $L = Pb = a\,h\,\gamma\,b$ für die Zeit eines Kolbenhubes. Diese nützliche Arbeit findet nur beim Aufsteigen des Kolbens, keine aber beim Niedersteigen statt.

52. Behalten wir die Bezeichnungen der vorhergehenden Auflösung bei, so drückt beim Aufziehen des Kolbens auf diesen nach unten eine Wassersäule von der Höhe $H$, nach oben von $H - y$, also nach unten ein Ueberschuß von $y$, folglich ist beim Aufziehen des Kolbens die bewegende Kraft = $a\,y\,\gamma$ und die Arbeit = $a\,y\,\gamma\,b$.

Beim Niedergehen des Kolbens ist die bewegende Kraft = $a\,x\,\gamma$; also die Arbeit $a\,x\,\gamma\,b$, folglich während eines vollständigen Wechsels der Pumpe die Arbeit = $a\,\gamma\,b\,(x + y) = a\,h\,\gamma\,b$.

53. Daß, abgesehen von Reibung und sonstigen Widerständen, die Arbeit der Pumpen dem Producte gleich ist, das man erhält, wenn man das Gewicht ($a\,b\,\gamma$) des während eines Kolbenhubs gehobenen Wassers mit der Höhe ($h$) der Ausflußmündung über dem Wasserspiegel multiplicirt.

54. $\frac{6}{144}$ . 10 . 61·75 = 25·7 Pfd. ist die Kraft, welche nöthig sein würde,

wenn keine Reibungs- und sonstige Widerstände zu überwinden wären. Gewöhnlich nimmt man an, daß bei gut construirten Pumpen $^1/_5$ der theoretischen Kraft zur Ueberwindung jener Widerstände hinreiche, also ist im vorliegenden Falle die wirklich anzuwendende Kraft $= 25{\cdot}7 + 5{\cdot}14 = 30{\cdot}84$ Pfd.

55. Die theoretische Kraftleistung ist $= (^6/_{144} \cdot 1^1/_4 \cdot 61{\cdot}75) \cdot 10 \cdot 15 = 482{\cdot}42$ Fußpfund, also die wirklich nothwendige (vergl. vorhergehende Auflösung) $= 482{\cdot}42 + ^1/_5 \cdot 482{\cdot}42 = 578{\cdot}9$ Fußpfund.

56. Weil die Kolben nie ganz wasserdicht schließen, also immer ein Theil des Wassers wieder zurückfällt, rechnet man als wirkliche Wassermenge bei gut construirten Pumpen 0·9 der theoretischen, also im vorliegenden Fall $0{\cdot}9 \cdot (^6/_{144} \cdot 1^1/_4) \cdot 15 = 7{\cdot}03$ Cubikfuß.

57. $P = Va - (V\alpha + Q) = V(a - \alpha) - Q.$

58. Aus $Va = V\alpha + Q$ folgt $V = \frac{Q}{a - \alpha}$; $V_1 = \frac{B}{B_1} \cdot \frac{Q}{a - \alpha}$.

59. Das Gewicht eines Cubikmeters atmosphärische Luft bei $0^0$ C. und 0·76 m Barometerstand ist $= 1{\cdot}293$ (Tabelle 5) oder annähernd 1·3 Kg, also das Gewicht eines Cubikmeters Wasserstoff $= 1{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}07$ (Tabelle 9, c) $= 0{\cdot}09$ Kg, folglich nach Aufgabe 57:

$$P = 600\,(1{\cdot}3 - 0{\cdot}09) - 520 = 206 \text{ Kg.}$$

60. Nimmt man das Gewicht eines Cubikmeters Luft $= 1{\cdot}3$ Kg und also das eines Cubikmeters Wasserstoff $= 1{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}07 - 0{\cdot}091$ Kg, so hat man (nach Aufg. 58) $\frac{d^3\pi}{6} = \frac{363}{1{\cdot}3 - 0{\cdot}091}$, also $d^3 = \frac{363 \cdot 6}{1{\cdot}209 \cdot {}^{22}/_7} =$ nahe 573, folglich $d = 8{\cdot}3$ m, oder es muß vielmehr $d$ größer als dieser Werth sein, da bei diesem der Ballon gerade nur schweben bleiben würde.

61. 1) Nehmen wir das Gewicht eines Cubikfußes Luft $= 0{\cdot}08$ Pfd. an, so wog die durch den Ballon verdrängte atmosphärische Luft $^{27}/_{28} \cdot 10\,000 \cdot 0{\cdot}08 = 771{\cdot}4$ Pfd.

Der in dem Ballon enthaltene Wasserstoff wog hiernach $\frac{771{\cdot}4}{5^1/_4} =$ 146·9 Pfd., also war das Gewicht des mit Wasserstoff gefüllten Ballons nebst Zubehör $= 146{\cdot}9 + 604{\cdot}5 = 751{\cdot}4$ Pfd., folglich die Steigkraft des Ballons $= 771{\cdot}4 - 751{\cdot}4 = 20$ Pfd.

2) Zur Auffindung der Höhe $h$, in welcher sich der Ballon ganz aufblähte, braucht man nur das Verhältniß der unteren und oberen Barometerstände $B$ und $b$ auszumitteln und dann die Mayer'sche Formel (aus Auflösung zu 25) anzuwenden. Nun verhält sich der untere Barometerstand $B$ zum oberen $b$, wie die entsprechenden Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft, also auch wie die Dichten des Wasserstoffs im Ballon an der Erdoberfläche zu der in der Höhe $h$, oder umgekehrt wie das Volumen des Ballons an der Erdoberfläche zu dem in der Höhe $h$, d. h. es verhält sich

$$B : b = 1 : {}^{27}/_{28} \text{ oder } \frac{B}{b} = {}^{28}/_{27},$$

man hat demnach
$h = 60\,000\ (log\ 28 - log\ 27) = 60\,000 \,.\, 0{\cdot}01551 = 930{\cdot}6$ par. Fuß. Sollte der Ballon höher steigen, so mußte ein Theil des Wasserstoffs aus dem Ballon herausgelassen werden.

---

# Auflösungen zu XVIII.

---

1. Bezeichnet $h_1$ die Höhe einer Luftsäule von der Dichte der eingeschlossenen Luft, welche denselben Druck ausübt, wie die Queckſilbersäule $h$ des Manometers, sowie $m$ den entsprechenden Contractionscoefficienten (aus Tab. 10), so ist, $h$ und $h_1$ in den Längeneinheiten von $g$ vorausgesetzt,

$$v = m\sqrt{2gh_1}, \text{ oder, da } h_1 = h \cdot \frac{D}{h},$$

$$v = m\sqrt{2gh\,\frac{D}{d}}, \text{ und } M = av = am\sqrt{2gh\,\frac{D}{d}}.$$

2. Aus $x : 4 = \sqrt{900} \,.\, \sqrt{400}$ folgt $x = 6$ cbm.

3. Die Dichte des Queckſilbers ist $D = 13{\cdot}6$, die der Luft unter dem Drucke von $b + h$ par. Zoll (nach Aufgabe 67 in XX.)
$d = \frac{0{\cdot}00129}{1 + 0{\cdot}004\,t} \cdot \frac{b + h}{28}$, beide auf die Dichte des Wassers bezogen, also nach Substitution der gegebenen Werthe in die Formeln der Aufgabe 1 und nach angemessener Reduction

$$\text{I.}\quad v = 1215 \,.\, m\sqrt{h \,.\, \frac{1 + 0{\cdot}004 \,.\, t}{b + h}} \text{ par. Fuß,}$$

$$\text{II.}\quad M = 1215 \,.\, am\sqrt{h \,.\, \frac{1 + 0{\cdot}004 \,.\, t}{b + h}} \text{ par. Cubikfuß.}$$

4. Setzt man in I. der vorhergegangenen Auflösung $b = 0$, $t = 10$, $m = 1$, so erhält man
$v = 1215\sqrt{1 + 0{\cdot}04} = 1238$ par. Fuß $= 1281$ preuß. Fuß.

5. Der vorhergehenden Auflösung gemäß muß diese Geschwindigkeit nur größer als 1281 Fuß sein.

6. Die Ausflußgeschwindigkeiten der Gase verhalten sich direct wie die Quadratwurzeln aus den Drücken, aber umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus

den Dichten. Da nun im vorliegenden Falle die Dichte ganz in demselben Verhältnisse sich ändert, wie der Druck (dem Mariotte'schen Gesetze gemäß) so muß die Ausflußgeschwindigkeit dieselbe bleiben.

7. Die Wassersäule des Manometers von 0·15 Fuß ist gleich geltend mit einer Quecksilbersäule von $\frac{0{\cdot}15}{13{\cdot}6} = 0{\cdot}01103$ Fuß. Man hat also in Formel II. der Auflösung zu 3 zu setzen: $h = 0{\cdot}01103$, $b = 2{\cdot}3$, $t = 1{\cdot}5$, $a = \frac{(0{\cdot}05)^2 \,.\, \pi}{4} = 0{\cdot}0019635$, $m = 0{\cdot}93$ (Tabelle 10 im Anhange), sowie den von $d$ herrührenden Factor unter dem Wurzelzeichen noch durch die Dichte des Leuchtgases, also durch 0·56 zu dividiren, und erhält dann $M = 0{\cdot}21056$ Cubikfuß in der Secunde, also fließen in der Stunde 758 Cubikfuß aus.

8. Die allgemeine Formel für die Ausflußmenge der atmosphärischen Luft durch Röhren ist nach d'Aubuisson's Versuchen

$$M = 6189 \sqrt{\frac{1 + 0{\cdot}004 \,.\, t}{b + h}} \cdot \sqrt{\frac{H \Delta^5}{L + 42 \frac{\Delta^5}{\delta^4}}} \text{ par. Cubikfuß,}$$

wenn $t$ die Temperatur, $b$ den Barometerstand, $h$ die Quecksilbersäule im Manometer nahe der Ausflußöffnung, $H$ diejenige im Manometer am Gasometer, $L$ die Röhrenlänge, $\Delta$ den Röhrendurchmesser und $\delta$ den Durchmesser der Ausflußöffnung bezeichnet.

Wenn $\delta = \Delta$, so muß man, Versuchen gemäß, in dieser Formel den Coefficienten 6189 noch mit 0·989 multipliciren, wodurch

$$M = 6121 \sqrt{\frac{1 + 0{\cdot}004 \,.\, t}{b + h}} \cdot \sqrt{\frac{H \Delta^5}{L + 42 \Delta}} \text{ wird.}$$

Setzt man für $\sqrt{\frac{1 + 0{\cdot}004 \,.\, t}{b + h}}$, welcher Ausdruck in den gewöhnlich vorkommenden Fällen nur wenig von dem Mittelwerth 0·652 sich unterscheidet, diesen letzteren Werth, so erhält man

$$M = 3991 \sqrt{\frac{H \,.\, \Delta^5}{L + 42 \Delta}},$$

also die Ausflußmenge eines Gases von der Dichte $d$:

$$M_1 = \frac{M}{\sqrt{d}} = 3991 \sqrt{\frac{H \,.\, \Delta^5}{(L + 42 \Delta) \,.\, d}}.$$

Setzen wir nun in dieser letzteren Formel $H = \frac{0{\cdot}15}{13{\cdot}6} = 0{\cdot}01103$, $\Delta = 0{\cdot}05$, $L = 400$ und $d = 0{\cdot}56$, so erhalten wir $M_1 = 0{\cdot}015615$ Cubikfuß in der Secunde, also in der Stunde strömen 46·2 Cubikfuß aus.

9. Man kann den Schornstein als den einen Schenkel einer communicirenden Röhre betrachten, deren anderer Schenkel, der umgebende Luftraum, jenen einschließt. Die äußere Luftsäule von der Höhe $H$ und der Temperatur $t$ würde, wenn sie die Temperatur $T$ der Luft im Schornsteine hätte, eine Höhe $= \frac{H.(1+aT)}{1+at}$ haben, worin $a$ den Ausdehnungscoefficienten der Luft bezeichnet, folglich ist

$$\frac{H(1+aT)}{1+at} - H = \frac{Ha(T-t)}{1+at}$$

die Höhe der Luftsäule, von welcher das Ausströmen der Luft aus dem Schornstein abhängt, also

$$v = \sqrt{2g\frac{Ha(T-t)}{1+at}},$$

also im vorliegenden Falle

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{\cdot}81 \cdot \frac{20 \cdot 0{\cdot}004 \cdot 135}{1{\cdot}06}} = 14{\cdot}1 \text{ m}.$$

10. Die theoretische Ausflußmenge der warmen Luft ist $= f \cdot v$, wenn $f$ den Querschnittsinhalt des Schornsteins bezeichnet, die theoretische Einflußmenge der kalten Luft ist also $= fv\frac{1+at}{1+aT}$, oder, wenn man für $v$ seinen Werth aus voriger Auflösung, sowie $a = 1/273$ setzt,

$$M = f\sqrt{2g\frac{H(T-t)(273+t)}{(273+T)^2}}.$$

11. Die Geschwindigkeit des Zuges ist, wenn man den Reibungswiderstand unberücksichtigt läßt, der Quadratwurzel aus der senkrechten Höhe des Schornsteines proportional, sie nimmt aber, wie aus der Formel der vorhergehenden Auflösung hervorgeht, durch Temperaturerhöhung nur in einem abnehmenden Verhältnisse zu, so daß durch Erwärmung der inneren Luftsäule über eine gewisse Temperatur (ungefähr 273°) hinaus sogar eine Abnahme des Zuges entsteht.

Uebrigens weiß man, daß die Luft im Schornsteine an den Wänden einen Widerstand erleidet, der dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Eine möglichst große Einflußgeschwindigkeit knüpft sich also an die Bedingung einer möglichst langsamen Bewegung im Schornsteine, welcher Bedingung hinreichend entsprochen wird, wenn der Querschnitt des Schornsteines an keiner Stelle weniger beträgt, als der Flächeninhalt der Rostöffnungen zusammengenommen.

12. Da hier $H = L = 14$, $D = 0{\cdot}5$, $T - t = 136{\cdot}5$, $k = 8{\cdot}85$, $k_1 = 4$, so ist $v = 5{\cdot}85$ m. Dagegen würde man nach der Formel in Auflösung zu 9 finden $v = 11{\cdot}7$ m.

13. Durch ähnliche Schlüsse wie in Auflösung zu 20 in XVI. ergiebt sich $P = \frac{c^2}{g} F \gamma_1$, wo $\gamma_1$ das Gewicht eines Cubikmeters Luft, nämlich 1·293 Kg (Tabelle 5), bezeichnet, also $P = \frac{10^2}{9{\cdot}81} \cdot 18 \cdot 1{\cdot}293 = 237$ Kg.

14. Da der Widerstand der Luft gegen eine in ihr bewegte Fläche mit dem Quadrate der Geschwindigkeit dieser Fläche wächst, so würde der Widerstand gegen einen einzigen Waggon $= 8^2 . 1\frac{1}{2}$ Pfd. $= 96$ Pfd. sein, wozu, um den Luftwiderstand gegen alle 10 Waggons zu finden, noch $10 . \frac{1}{8} . 96 = 120$ Pfd. kommen, so daß also der gesammte Luftwiderstand $96 + 120 = 216$ Pfd. beträgt.

15. Der Widerstand der Luft gegen die beiden gleich schnellen Kugeln verhält sich (annäherungsweise) wie ihre Oberflächen, also wie die Quadrate ihrer Radien. Dagegen verhalten sich die Bewegungsgrößen, welche die beiden Kugeln bei ihrem Austritt aus den Gewehrläufen besitzen, weil ihre Geschwindigkeiten gleich sind, wie ihre Massen, also bei gleicher Materie wie die Cuben ihrer Radien. Daraus wird klar, daß die Geschwindigkeit der schwereren Kugel weniger durch den Widerstand der Luft leidet, daß also diese Kugel in der Zeit, in welcher sie nach dem Gesetze des Falles die Erde berühren muß, weiter geflogen ist, als die leichtere von gleicher Anfangsgeschwindigkeit.

---

## Auflösungen zu XIX.

1. $40 . 1024 = 40\,960$ par. Fuß.

2. Von dem Augenblicke an, in welchem der erste Laut des Donners ins Ohr gelangt, wird nach jeder Secunde ein anderer hörbar, der von einer um je 1024 Fuß weiter entfernten Stelle der Wolke herrührt. Demnach kann die Wolke höchstens eine Länge von $20 . 1024$ Fuß oder von beinahe einer Meile haben.

3. Die Entfernung $AC$ des Anfangspunktes des Blitzes vom Beobachter ist $= 13 . 1024 = 13\,312$ Fuß, die Entfernung des Endpunktes oder $BC = (13 + 17) . 1024 = 30\,720$ Fuß. Daraus und aus dem Winkel $w = 36^0$ findet sich $AB$, d. h. die gesuchte Strecke, $= 21\,430$ Fuß beiläufig.

4. Es sei die Zeit, welche der Stein zum Durchfallen der Grube braucht, $= t$, so ist $\frac{1}{2} g t^2 = 15 . t^2 = 400$ ($g = 30$ par. Fuß), also

$$t = \sqrt{\frac{400}{15}} = 5{\cdot}16 \text{ Secunden.}$$

Die zur Zurücklegung des Schalles nöthige Zeit ist $^{400}/_{1024} = 0{\cdot}39$ Secunden; also ist die gesuchte Zeit $= 5{\cdot}16 + 0{\cdot}39 = 5{\cdot}55$ Secunden.

5. Ist $x$ die Zeit, welche der Stein zum Hinunterfallen braucht, so ist $10 - x$ die Zeit, welche der Schall zum Heraufkommen nöthig hat, und man erhält aus der Gleichung $\frac{30}{2} x^2 = 1024\,(10 - x)$ den Werth von $x = 8{\cdot}77$ Secunden, also die Tiefe der Grube $= {}^1/_2\, g\, t^2 = 15\,.\,(8{\cdot}77)^2 = 1153$ Fuß.

6. $n = {}^{1024}/_{32} = 32$.

7. $\tau = {}^4/_{1024} = {}^1/_{256}$ Secunden.

8. Bezüglich $^{1024}/_{16} = 64$ Fuß, $^{1024}/_{32768}$ Fuß $= 4{\cdot}5$ Linien und $^{1024}/_{36500} = 4$ Linien ungefähr.

9. Da man der Erfahrung gemäß höchstens 9 verschiedene Laute (Sylben) in einer Secunde von einander unterscheiden kann, der Schall aber in der Secunde einen Raum von 1024 Fuß zurücklegt, so müssen die beiden Schalle wenigstens $^{1024}/_9 = 113{\cdot}8$ Fuß von einander entfernt sein.

10. 57 Fuß, wenn er nur eine, 2 . 57 wenn er zwei, 3 . 57 Fuß, wenn er 3 Sylben wahrnehmen soll u. s. w.

11. $\frac{3\,.\,1024}{2} = 1536$ Fuß.

12. Diejenige, daß die Harmonie der Töne eines Musikstückes durch die Entfernung nicht gestört wird.

13. Obgleich sich hohe und tiefe Töne gleich schnell fortpflanzen, so dringen doch die Schallwellen hoher Töne weiter in der Luft vor, weil die öfteren Oscillationen ihrer Theilchen kräftiger wirken. Tiefe Töne müssen stärker, d. h. die Oscillationen, durch welche sie erzeugt werden, weiter sein, wenn sie eben so weit dringen sollen als hohe.

14. Weil nach dem Mariotte'schen Gesetz die Expansivkraft der Luft in demselben Grade wie ihre Dichtigkeit wächst, also bei doppelter Dichtigkeit der Luft zwar doppelt so viel Masse zu bewegen, aber auch eine doppelt so große Kraft zu ihrer Bewegung wirksam ist. Durch Erhöhung der Temperatur wird aber die Expansivkraft der Luft größer und dies hat eine größere Geschwindigkeit des Schalles zur Folge (s. Tabelle 11 im Anhang).

15. Geht der Schall aus dichterer Luft in dünnere von gleicher Temperatur über, so verursacht der Stoß jeder dichteren Luftschicht auf die folgende dünnere eine größere Vibrationsweite der letzteren, als die erstere besitzt, und durch diese wird die Verringerung der Luftmasse in der Einwirkung auf das Ohr ersetzt. Geht umgekehrt der Schall aus dünnerer Luft in dichtere über, so wird die geringere Vibrationsweite der das Ohr treffenden Luftmenge

durch ihre größere Dichte ersetzt. Daraus geht hervor, daß die Stärke des Schalles bei gleicher Temperatur abhängig ist von der Dichtigkeit der Luft, in welcher er erregt, nicht aber von der Dichtigkeit der Luft, in welcher er vernommen wird.

16. Der Schall wird (ähnlich wie das Licht) beim Uebergang aus einem Mittel in ein anderes von verschiedener Dichte durch Reflexion stets geschwächt. So lange nun Champagnerschaum, also eine Mischung von Wein und Kohlensäure, im Glase sich befindet, werden die Schallschwingungen durch vielfache Reflexionen in dem Schaum geschwächt, was nicht mehr der Fall, wenn die Flüssigkeit gleichartig geworden ist.

17. Gesetzt der Ton entstehe durch $n$ Schwingungen in der Secunde. Nähert sich ein Beobachter der Tonquelle mit einer Geschwindigkeit von $v$ Fuß (in der Secunde), so nimmt sein Ohr in der Secunde $n + x$ Wellenstöße auf, wenn $x$ die Anzahl der Wellenlängen bedeutet, welche in einer Strecke von $v$ Fuß enthalten sind, und die sich aus der Proportion $1024 : v = n : x$ findet; das Ohr empfängt also $n + \frac{n \cdot v}{1024}$ Schwingungen in der Secunde. Beim Entfernen von der Tonquelle mit derselben Geschwindigkeit wirken auf das Ohr nur $n - \frac{v \cdot n}{1024}$ Schwingungen in der Secunde.

18. Die Tonhöhe der Saite ist bei beliebiger Weite der Schwingungen die nämliche und bleibt dieselbe, wenn auch der Ton beim allmäligen Abnehmen der Ablenkung nach und nach schwächer wird.

19. Wie $9 : 4$.

20. Wie $\sqrt{4} : \sqrt{9} = 2 : 3$.

21. Wie $(3 \cdot 0{\cdot}4) : (2 \cdot 0{\cdot}3)$, d. h. wie $2 : 1$.

22. $\frac{\sqrt{36}}{4} : \frac{\sqrt{25}}{3^1/_3} = 1 : 1$, d. h. die Tonhöhen sind einander gleich.

23. Bezeichnet $\gamma$ das Gewicht eines Cubikfußes Wasser, so ist

$$n = \frac{1}{ld}\sqrt{\frac{gP}{\pi s \gamma}} = \frac{1}{4 \cdot \frac{0{\cdot}8}{144}}\sqrt{\frac{31{\cdot}25 \cdot 12}{3{\cdot}1416 \cdot 0{\cdot}5 \cdot 61{\cdot}75}} = 88{\cdot}5.$$

24. $n = {}^1/_2\sqrt{\frac{gP}{lp}}$ (welche Formel man aus der vorhergehenden erhält, wenn man $p$ statt ${}^1/_4 d^2 \pi l s \gamma$ setzt)

$$= {}^1/_2\sqrt{\frac{31{\cdot}25 \cdot 4}{9 \cdot \frac{0{\cdot}5}{30}}} = 14{\cdot}43$$

also $t = \frac{1}{n} = \frac{1}{14{\cdot}43} = 0{\cdot}069$ Secunden.

25. Da die Saite $^1/_{20}$ Loth $= {}^1/_{600}$ Pfd. wiegt, so hat man

$$n = {}^1/_2 \sqrt{\frac{31{\cdot}25 \,.\, 26{\cdot}2}{2 \,.\, {}^1/_{600}}} = 248.$$

26. Aus der Formel zu Aufgabe 23 folgt

$$P = \frac{n^2 d^2 l^2 \pi s \gamma}{g} = \frac{400^2 \,.\, 1{\cdot}6^2 \,.\, 0{\cdot}0016^2 \,.\, 3{\cdot}1416 \,.\, 8{\cdot}4 \,.\, 61{\cdot}75}{31{\cdot}25}$$
$$= 54{\cdot}69 \text{ Pfd.}$$

27. Da sich die Schwingungen zweier Stäbe allgemein verhalten wie $\frac{d_1}{l_1^2} : \frac{d_2}{l_2^2}$, im gegenwärtigen Falle die Schwingungen aber gleich sind, so hat man hier $\frac{0{\cdot}8}{4} = \frac{1{\cdot}8}{l_2^2}$, also $l_2 = 3$ Fuß.

28. Der Ton $C$ entspricht $2 \,.\, 16 = 32$ Schwingungen.
„ „ $\overline{C}$ „ $2 \,.\, 32 = 54$ „
„ „ $c$ „ $2 \,.\, 64 = 128$ „
„ „ $d$ „ $^9/_8 \,.\, 128 = 144$ „
„ „ $e$ „ $^5/_4 \,.\, 128 = 160$ „
„ „ $f$ „ $^4/_3 \,.\, 128 = 170{\cdot}66\ldots$ „
„ „ $g$ „ $^3/_2 \,.\, 128 = 192$ „
„ „ $a$ „ $^5/_3 \,.\, 128 = 213{\cdot}33\ldots$ „
„ „ $h$ „ $^{15}/_8 \,.\, 128 = 240$ „
„ „ $\underline{c}$ „ $2 \,.\, 128 = 256$ „

29. In der *c-dur*-Tonleiter folgen auf den Grundton zwei ganze, dann ein halber, dann wieder drei ganze und zuletzt wieder ein halber, und um dieselbe Reihenfolge auch für den Grundton *g* zu erhalten, braucht man in der *c-dur*-Tonleiter nur den Ton *f* um einen halben Ton zu erhöhen, d. h. statt *f* den Ton *fis* zu setzen.

30. Für die *d-dur*-Tonleiter müssen *fis* und *cis*, für die *a-dur*-Tonleiter *fis*, *cis* und *gis* eingeschaltet werden.

31. *h-dur* mit den eingeschalteten Tönen *cis*, *dis*, *fis*, *gis* und *ais*.

32. Wenn man von *c* aus von der Linken nach der Rechten um je eine Quinte weiter schreitet, so ist die erste Quinte der Grundton derjenigen Tonart, welche ein Kreuz, die zweite Quinte der Grundton der Tonart, welche zwei Kreuze erhält u. s. w.

33. Um den Grundton der Tonart zu finden, in welcher 1, 2, 3 u. s. w. *b* vorgezeichnet sind, braucht man nur von *c* aus um je 1, 2, 3 u. s. w. Quarten von der Linken nach der Rechten, oder um so viel Quinten von der Rechten nach der Linken fortzuschreiten.

34. Die eingeschalteten Töne sind die kleiner geschriebenen der nachstehenden enharmonischen Tonleiter:

$$\mathrm{C}\ \overset{\text{Cis}}{\underset{\text{Des}}{}}\ \mathrm{D}\ \overset{\text{Dis}}{\underset{\text{Es}}{}}\ \mathrm{E}\ \overset{\text{Eis}}{\underset{\text{Fes}}{\mathrm{F}}}\ \overset{\text{Fis}}{\underset{\text{Ges}}{}}\ \mathrm{G}\ \overset{\text{Gis}}{\underset{\text{As}}{}}\ \mathrm{A}\ \overset{\text{Ais}}{\underset{\text{B}}{}}\ \mathrm{H}\ \overset{\text{His}}{\underset{\text{Ces}}{\mathrm{C}}},$$

von welchen die unter einander geschriebenen Töne so wenig differiren, daß sie als zusammenfallend betrachtet werden können. Die Octave der diatonischen Tonleiter enthält also 8, die der enharmonischen 22, die der chromatischen 13 Töne.

35. Bei der gleichschwebenden Temperatur werden die Octaven rein erhalten, die Intervalle je zweier auf einander folgenden Töne der chromatischen Tonleiter aber als gleich angenommen, also, wenn $c$, $cis$, $d$, $dis$, $e$ u. s. w. die Schwingungszahlen der entsprechenden Töne bezeichnen,

$$\frac{cis}{c} = \frac{d}{cis} = \frac{dis}{d} = \frac{e}{dis} = \frac{f}{e} = \ldots = \frac{h}{ais} = \frac{\overline{c}}{h}.$$

Bezeichnet $i$ eins dieser zwölf gleichen Intervalle, also das Intervall eines halben Tons, so ergiebt sich

$$cis = i \,.\, c;\ d = i \,.\, cis = i^2 \,.\, c;\ dis = i \,.\, d = i^3 \,.\, c \ldots;$$

$$h = i \,.\, ais = i^{11} \,.\, c;\ \overline{c} = i \,.\, h = i^{12} \,.\, c,$$

also ist, wenn $c = 1$ gesetzt wird, $\overline{c} = 2 = i^{12}$, folglich

$$i = \sqrt[12]{2} = 1{\cdot}059463,$$

woraus sich die nachfolgenden Intervalle ergeben:

| Name des Tons. | Reines Intervall. | Gleichschwebend temperirtes Intervall. |
|---|---|---|
| $c$ | 1 | $= 1$ |
| $cis$ | $^{25}/_{24} = 1{\cdot}04166$ | $i^1 = 1{\cdot}05946$ |
| $des$ | $^{27}/_{25} = 1{\cdot}08000$ | |
| $d$ | $^{9}/_{8} = 1{\cdot}12500$ | $i^2 = 1{\cdot}12246$ |
| $dis$ | $^{75}/_{64} = 1{\cdot}17187$ | $i^3 = 1{\cdot}18921$ |
| $es$ | $^{6}/_{5} = 1{\cdot}20000$ | |
| $e$ | $^{5}/_{4} = 1{\cdot}25000$ | $i^4 = 1{\cdot}25992$ |
| $fes$ | $^{32}/_{25} = 1{\cdot}28000$ | |
| $eis$ | $^{125}/_{96} = 1{\cdot}30208$ | $i^5 = 1{\cdot}33484$ |
| $f$ | $^{4}/_{3} = 1{\cdot}33333$ | |
| $fis$ | $^{25}/_{18} = 1{\cdot}38889$ | $i^6 = 1{\cdot}41421$ |
| $ges$ | $^{36}/_{25} = 1{\cdot}44000$ | |
| $g$ | $^{3}/_{2} = 1{\cdot}50000$ | $i^7 = 1{\cdot}49831$ |
| $gis$ | $^{25}/_{16} = 1{\cdot}56250$ | $i^8 = 1{\cdot}58740$ |
| $as$ | $^{8}/_{5} = 1{\cdot}60000$ | |
| $a$ | $^{5}/_{3} = 1{\cdot}66666$ | $i^9 = 1{\cdot}68179$ |
| $ais$ | $^{125}/_{72} = 1{\cdot}73611$ | $i^{10} = 1{\cdot}78180$ |
| $b$ | $^{9}/_{5} = 1{\cdot}80000$ | |
| $h$ | $^{13}/_{8} = 1{\cdot}87500$ | $i^{11} = 1{\cdot}88775$ |
| $ces$ | $^{48}/_{25} = 1{\cdot}92000$ | |
| $his$ | $^{125}/_{64} = 1{\cdot}95313$ | $i^{12} = 2{\cdot}00000$ |
| $\overline{c}$ | $2 = 200\,000$ | |

36. $c, g, \overline{c}, \overline{e}, \overline{g}$, u. s. w., da die Schwingungszahlen dieser Töne 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. sind, wenn die von $C$ durch 1 ausgedrückt wird.

37. Wenn man eine Klaviersaite in $^1/_7$ ihrer Länge anschlägt, so kann die ganze Saite, aber auch jede Hälfte, jedes Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel derselben für sich schwingen, daher sind in dem erzeugten Klange die sechs ersten Theiltöne vorhanden. Würde dagegen die Saite in ihrer Mitte angeschlagen, so würden in dem Klange alle geradzahligen Obertöne fehlen, weil sie an der angeschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben müßten, dessen Entstehung aber durch den Anschlag verhindert wird. Beim Anschlagen in $^1/_3$ der Saitenlänge würde der dritte und der sechste Oberton fehlen u. s. w.

38. Berührt man die Saite des Monochords, nachdem sie in $^1/_7$ ihrer Länge gerupft ist, in ihrer Mitte lose mit dem Finger oder einem feinen Pinsel, so werden dadurch die Töne der ganzen Saite sowie ihrer Drittel und Fünftel gedämpft und es bleiben nur noch die Töne der Hälften, Viertel und

Sechstel der Saitenlänge bestehen, wovon der der Hälften, Viertel und Sechstel der Saitenlänge bestehen, wovon der der Hälften, also die Octave des Grundtons am stärksten ins Ohr tritt. Bei Berührung der Saite in ihrem vierten Theil fällt auch noch die erste Octave weg und es tritt die zweite Octave am deutlichsten auf. Bei Berührung in $^1/_3$ der Saitenlänge ist wesentlich nur die Quinte der Octave deutlich wahrnehmbar u. s. w.

39. Der gesuchte Ton liegt zwischen der vierten und fünften oberen Octave von $C$, da die vierte Octave $2^4 = 16$mal und die fünfte $2^5 = 32$mal so viel Schwingungen macht. Bezeichnet nun $x$ das Intervall des gesuchten Tones in Beziehung auf die vierte Octave von $C$, so muß $x \,.\, 16 = 24$ sein, woraus $x = {}^3/_2$ folgt; der gesuchte Ton ist also $\overline{\overline{g}}'$.

40. Der gesuchte Ton ist höher, als die dritte untere Octave von $\overline{\overline{c}}$, und niedriger als die zweite. Geht man also von der dritten unteren Octave, die $^1/_8$ der Schwingungen von $\overline{\overline{c}}$ macht, aus und bezeichnet wieder $x$ das Intervall, so erhält man aus $x \,.\, {}^1/_8 = {}^1/_6$ das Intervall $x = {}^4/_3$; also ist $F$ der gesuchte Ton.

41. Aus $x : 256 = 5 : 2$ folgt $x = 640$ Schwingungen in der Secunde, das Intervall des Tones ist also $\frac{640}{2 \,.\, 256} = \frac{5}{4}$, daher der Ton selbst $\overline{\overline{c}}'$.

42. Der Stab muß ${}^5/_4 \,.\, 512 = 640$ Schwingungen machen, und wenn man die ursprüngliche Länge desselben mit $l$, die gesuchte mit $x$ bezeichnet, so muß sich verhalten $512 : 640 = x^2 : l^2$, woraus folgt $x = 0{\cdot}895 \,.\, l$.

43. Bezeichnet $n$ die Anzahl der Schwingungen, welche die Saite bei der anfänglichen Spannung macht, so hat man $n : {}^3/_2\, n = \sqrt{36} : \sqrt{x}$ und daraus $x = 81$ Pfd.

44. $484 - 480 = 4$ Stöße.

45. $\alpha$) Der Combinationston ist $\overline{\overline{C}}$, da die Schwingungszahl von $c = 128$, die von $d = {}^9/_8 \,.\, 128 = 144$, deren Differenz aber $= 16$ ist.

$\beta$) Die Differenz der den Tönen $\overline{c}$ und $\overline{e}$ entsprechenden Schwingungszahlen 256 und 320 ist 64, und dieser Schwingungszahl entspricht der Ton $C$.

46. Bezeichnet man die Schwingungszahlen der beiden Töne mit $x$ und $y$, so hat man die beiden Gleichungen $y - x = 6$ und ${}^{16}/_{15}\, x = y$, und daraus $x = 90$, $y = 96$; die beiden Töne sind also *Fis* und $G$.

47. Die Schwingungszeit eines Pendels von 0·28 m Länge ist $^5/_9$ Secunden (IX, 3), also macht es während einer Secunde $1 : \frac{5}{9} = \frac{9}{5}$ Schwingungen, während einer Secunde finden also durch das Zusammenklingen der beiden um einen großen halben Ton verschiedenen Töne $\frac{9}{5} \cdot 4$ Stöße statt.

Bezeichnen $x$ und $y$ die Schwingungszahlen der beiden Töne, so hat man die beiden Gleichungen: $\frac{x}{y} = \frac{16}{15}$ und $x - y = \frac{9}{5} \cdot 4$, woraus $x = 115{\cdot}2$, $y = 108$ folgt.

48. Aus $x - 432 = \frac{104{\cdot}6 \,.\, 4}{60} =$ nahe 7 folgt $x = 439$.

49. Da der Ton $e$ aus 128 Schwingungen entsteht, so ist die entsprechende Wellenlänge gleich $^{1024}/_{128} = 8$ Fuß.

50. Wie 4 : 3.

51. Sie muß halb so lang sein, wie die entsprechende Wellenlänge, also, da diese $^{1024}/_{16} = 64$ Fuß beträgt, $= {}^{64}/_{2} = 32$ Fuß, weshalb man $\underline{\underline{C}}$ auch das 32füßige $C$ nennt.

52. Die dem Tone $\overline{\overline{c}}$ entsprechende Wellenlänge ist $= {}^{1024}/_{512} = 2$ Fuß, die offene Orgelpfeife, die diesen Ton geben soll, muß also 1 Fuß, die gedeckte $^1/_2$ Fuß lang sein.

53. Dem Tone $\overline{a}$ entspricht eine Wellenlänge von $\frac{1024}{426^2/_3} = 2^2/_5$ Fuß, also muß die Pfeife eine Länge von $2^2/_5 : 4 = {}^3/_5$ Fuß haben.

54. Beim Anblasen des Grundtones hat sie einen Schwingungsknoten in der Mitte und an jedem ihrer Enden einen Bauch; beim nächstfolgenden Tone hat sie zwei Schwingungsknoten und drei Bäuche, nämlich einen Bauch in der Mitte und einen an jedem Ende; beim dann folgenden Tone hat sie drei Schwingungsknoten und vier Bäuche u. s. w.

55. Eine gedeckte Pfeife hat beim Anblasen des Grundtons einen Schwingungsknoten am Boden und einen Bauch an der Oeffnung, sie kann aber auch zwei Knoten und zwei Bäuche, drei Knoten und drei Bäuche u. s. w. haben, wobei stets einer der Knoten am Boden, einer der Bäuche an der Oeffnung liegt.

56. Die harmonischen Töne $c$, $g$, $\overline{c}$, $\overline{e}$, $\overline{g}$ und so weiter, oder: In einer ungedeckten Pfeife entstehen Töne, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie die Reihenfolge der ganzen Zahlen.

57. Der Grundton der Pfeife würde dann um eine Octave niedriger liegen als vorher, also $\underline{C}$ sein, und bei stärkerem Anblasen würde man die Töne $G$, $e$, $b$, $\overline{d}$ erhalten, d. h. in einer gedeckten Pfeife entstehen Töne, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie die Reihenfolge der ungeraden Zahlen.

58. Poisson hat durch die Analysis gefunden und Savart hat es durch Versuche bestätigt, daß zwischen den Transversalschwingungen $n$ und den Longitudinalschwingungen $n_1$ einer Saite von der Länge $l$ die Relation $n\sqrt{l} = n_1\sqrt{\alpha}$ stattfindet, worin $\alpha$ die durch das spannende Gewicht bewirkte Verlängerung der Saite bezeichnet.

59. Gleichfalls nach Poisson und Savart die Relation $\frac{n}{n_1} = 3{\cdot}5608\ \frac{r}{l}$, worin $n$, $n_1$ die in voriger Auflösung angegebene Bedeutung haben, $r$ den Halbmesser und $l$ die Länge des Stabes bezeichnen.

60. Da nach Aufgabe 67 in XX. in diesem Falle

$$d = \frac{B}{13{\cdot}6\ .\ 770\ .\ 0{\cdot}76\ .\ (1 + at)}$$ ist, so ergiebt sich

$$v = \sqrt{9{\cdot}8088\ .\ 10471\ .\ 0{\cdot}76\ .\ 1{\cdot}4\ .\ (1 + at)}$$

(worin also der Factor $B$ nicht mehr vorkommt, weshalb auch in der Aufgabe sein Werth nicht angegeben ist), oder $v = 338{\cdot}6\ \sqrt{1 + \frac{t}{273}}$,

also bei 0° C. ist $v = 330{\cdot}6$ m,
bei 16° C. ist $v = 340{\cdot}1$ „

Genaue unmittelbare Beobachtungen haben bei 16° C. die Schallgeschwindigkeit = 340·88 m gegeben, was von dem eben theoretisch gefundenen Werthe nur wenig abweicht.

61. Setzt man in der letzten Formel der vorigen Auflösung 340·88 anstatt $v$, sowie $v_0$ statt des dort durch Rechnung gefundenen Werthes 330·6, so hat man $340{\cdot}88 = v_0\sqrt{1 + at}$, worin $v_0$ die Geschwindigkeit bei 0° bedeutet, also $= \frac{340{\cdot}88}{\sqrt{1 + at}} = \frac{340{\cdot}88}{\sqrt{1 + {}^{16}/_{273}}} = 331{\cdot}3$ m $= 1055{\cdot}6$ preußische Fuß ist. Die Geschwindigkeit bei 10° C. ist dann $v_1 = v_0\sqrt{1 + at} = 331{\cdot}3\ \sqrt{1 + {}^{10}/_{273}} = 337{\cdot}26$ m $= 1074{\cdot}6$ preuß. Fuß.

62. Die Geschwindigkeit des Schalles ist um so größer je größer die Elasticität des Körpers, in welchem er fortschreitet, und je geringer die Dichte desselben ist. Ein größerer Druck bei gleichbleibender Temperatur macht zwar die Luft elastischer, aber in gleichem Verhältniß auch dichter, die Schallgeschwindigkeit bleibt also dieselbe. Wärmere Luft ist aber elastischer, als kältere und zugleich dünner (oder im eingeschlossenen Raume doch gleich dicht), in wärmerer Luft muß also die Schallgeschwindigkeit größer sein als in kälterer.

63. Mit der Temperaturerhöhung im Concertsaal wächst nach voriger Aufgabe die Geschwindigkeit $v$ des Schalls; da sich aber die Länge $l$ der Schallwelle des Tons nach der Länge des Blasinstruments richtet, also dieselbe bleibt, so muß wegen $l = \frac{v}{n}$ die Schwingungszahl $n$ in demselben Verhältniß wie $v$ größer, allso der Ton höher werden.

64. Weil die Dichtigkeit der Luft bei warmem Wetter weniger gleichmäßig ist, als bei kaltem.

**65.** Der Ton $C$ entspricht 64 Schwingungen, die Terze desselben $\frac{5}{4} \cdot 64 =$ 80 Schwingungen, daher hat man, wegen $l = \frac{v}{n}$ oder $n = \frac{v}{l}$, mit Berücksichtigung der Aufgabe 61:

$$64 = v_0 \sqrt{1 + \frac{10}{273}} : l \text{ und } 80 = v_0 \sqrt{1 + \frac{x}{273}} : l,$$

woraus $64 : 80 = \sqrt{1 + \frac{10}{273}} : \sqrt{1 + \frac{x}{273}}$, also $x = 169^0$ C. folgt.

**66.** Der Ton $\overline{\overline{h}}$ entspricht $^{15}/_8 \cdot 512 = 960$ Schwingungen in der Secunde. Da nun die Pfeifenlänge gleich einer halben Wellenlänge, also die Wellenlänge $= 4$ Fuß ist, so ist die gesuchte Geschwindigkeit $= 960 \cdot 4 = 3840$ Fuß.

**67.** Der Druck einer Atmosphäre ist gleich dem Druck einer Wassersäule von $13{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}76 = 10{\cdot}336$ m, also wird eine Wassersäule von 1 m Höhe durch das Gewicht einer ihr gleichen Wassersäule um $\frac{0{\cdot}00004785}{10{\cdot}336} = 0{\cdot}00000463$ m verkürzt, also ist

$$v = \sqrt{\frac{9{\cdot}8088}{0{\cdot}00000463}} = 1456 \text{ m}.$$

Die Beobachtung hat 1435 m ergeben.

**68.** Nach Chladni's Versuchen sind die in dem Stabe stattfindenden stehenden Longitudinalschwingungen den stehenden Luftschwingungen in einer offenen Pfeife vergleichbar. Wie sich in dieser beim tiefsten Ton ein Schwingungsknoten in der Mitte und eine Viertelwelle auf jeder Seite desselben befindet, so auch in jenem Stabe. Nun giebt eine offene Pfeife von 1 Fuß Länge einen Ton, welcher $^{1024}/_2 = 512$ Schwingungen in der Secunde erfordert; dagegen entspricht der in dem Stabe hervorgerufene Ton der Schwingungszahl $^9/_8 \cdot 4096 = 4608$, folglich finden in dem Stabe $^{4608}/_{512} = 9$mal so viel Schwingungen in der Secunde statt als in der offenen Pfeife, woraus folgt, daß die Geschwindigkeit des Schalles in dem Silber 9mal so groß ist als in der Luft.

**69.** Der hervorgerufene Ton wird durch 2048 Schwingungen in der Secunde erzeugt. Eine gleich lange offene Pfeife würde aber einen Grundton geben, der $^{1024}/_8 = 128$ Schwingungen entspricht. Der Schall pflanzt sich also im Weidenholze $^{2048}/_{128} = 16$mal so schnell fort als in der Luft.

**70.** Daß alle Körper zusammendrückbar und ausdehnbar sind.

# Auflösungen zu XX.

1. $n^0\,\mathfrak{R}. = {}^5/_4\, n^0\,\mathfrak{C}. = ({}^9/_4\, n + 32)^0\,\mathfrak{F}.$
   $n^0\,\mathfrak{C}. = {}^4/_5\, n^0\,\mathfrak{R}. = ({}^9/_5\, n + 32)^0\,\mathfrak{F}.$
   $n^0\,\mathfrak{F}. = {}^4/_9\,(n - 32)^0\,\mathfrak{R}. = {}^5/_9\,(n - 32)^0\,\mathfrak{C}.$
2. $a = \dfrac{L_1 - L}{t \,.\, L}.$
3. $L_1 = L\,(1 + a \,.\, t).$
4. $x = 2{\cdot}5\,(1 + 0{\cdot}000011 \,.\, 30) = 2{\cdot}50083$ m.
5. $x = 0{\cdot}3\,(1 + 0{\cdot}00003331 \,.\, 40) = 0{\cdot}3004$ m.
6. $x = L\,[1 + a\,(t_1 - t)]$ annäherungsweise genau, wenn die Temperaturen zwischen $0^0$ und $100^0$ liegen. Richtiger und bedeutend höheren oder tieferen Temperaturen immer anzuwenden ist die aus der Proportion $L_{.}: x = (1 + at) : (1 + at_1)$ folgende Formel $x = \dfrac{1 + at_1}{1 + at} \cdot L,$ welche man auch erhält, wenn man die Länge $L$ bei $t^0$ erst auf die Temperatur $0^0$ reducirt und dann die Länge bei $t_1^0$ bestimmt. Aus der zweiten Formel folgt

$$x = L\left(1 + \frac{a(t_1 - t)}{1 + at}\right),$$

   woraus bei Vernachlässigung des zwischen $0^0$ und $100^0$ für feste und flüssige Körper sehr kleinen Werthes $at$ im Nenner die erste Formel hervorgeht.

   Diese erste Formel würde nur dann richtig sein, wenn die Längenzunahmen durch die Wärme von $0^0$ an in geometrischer Progression stattfänden, während diese Zunahmen doch nur eine arithmetische Progession bilden. Bei Temperaturen zwischen $0^0$ und $100^0$ fallen aber die aus diesen verschiedenen Betrachtungsweisen sich ergebenden Werthe zusammen.
7. Aus $0{\cdot}5 = x\,(1 + 0{\cdot}0000192 \,.\, 40)$ folgt $x = 0{\cdot}499616$ m.
8. $x = 2\,(1 + 80 \,.\, 0{\cdot}000011) = 2{\cdot}00176$ m.
9. $x = \dfrac{1 + 0{\cdot}00000861 \,.\, 400}{1 + 0{\cdot}00000861 \,.\, 25} \cdot 2 = 2{\cdot}006456$ m.
10. $x = 2\,(1 + 0{\cdot}0000192 \,.\, 15) = 2{\cdot}000576$ m.
11. Bezeichnet $l$ die Länge, $b$ die Breite der Platte bei $0^0$, so ist bei $t^0$ die Länge derselben $= l\,(1 + at)$, ihre Breite $= b\,(1 + at)$, also ihr Flächeninhalt $= l \,.\, b \,.\, (1 + at)^2 = F\,(1 + at)^2 = F\,(1 + 2at + a^2t^2),$

wofür aber gewöhnlich, wegen der Kleinheit von $a^2t^2$ bei Temperaturen zwischen 0° und 100° C. nur $F.(1+2at)$ gesetzt wird.

12. $20.(1+2.0{\cdot}000011.80) = 20{\cdot}0352$ Quadratdecimeter.

13. Um $78{\cdot}6486 - 78{\cdot}54 = 0{\cdot}1086$ Quadratcentimeter.

14. Bei 20° ist sie $= 10\,(1+2.10.0{\cdot}000011) = 10{\cdot}0022$ Quadratfuß, bei 0° ist sie $= 10\,(1-2.10.0{\cdot}000011) = 9{\cdot}9978$ Quadratfuß.

15. Bezeichnet $l$ die Länge, $b$ die Breite, $h$ die Höhe des Körpers bei 0°, so ist sein Inhalt bei $t^0 = l\,(1+at).b\,(1+at).h\,(1+at) = K.(1+at)^3 = K(1+3at+3a^2t^2+a^3t^3)$, wofür aber bei Temperaturen von 0° bis 100° oder doch nahe diesen Grenzen $K(1+3at)$ gesetzt werden kann.

16. Um $12.50.{}^3/_{85200} = {}^3/_{142}$ Cubikfuß oder $36{}^1/_2$ Cubikzoll.

17. $5.(1+0{\cdot}0000192.100) = 5{\cdot}0096$ cm.

18. $5\,(1+{}^1/_{5550}.80) = 5{\cdot}072$ cbdm.

19. $1+3.0{\cdot}000009.80 = 1{\cdot}00216$ l.

20. $24\,(1+{}^{85}/_{5550}) = 24{}^{204}/_{555}$ cbcm.

21. $20.(1+{}^1/_{24}) = 20{}^5/_6$ l.

22. $\dfrac{13{\cdot}6}{1+\dfrac{t}{5550}}$.

23. a. Aus $H = x\left(1+\dfrac{t}{5550}\right)$ folgt $x = \dfrac{H}{1+\dfrac{t}{5550}}$ oder $x = H - \dfrac{H.t}{5550} + \cdots$, woraus sich die behufs der Reduction an der beobachteten Höhe $H$ anzubringende Correction $-\dfrac{H.t}{5550}$ hinreichend genau ergiebt. Diese Correction wird für Grade unter 0, weil dann $t$ negativ ist, $+\dfrac{H.t}{5550}$.

b. Für Grade nach Réaumur ist der Ausdehnungscoefficient ${}^1/_{4440}$ zu nehmen.

Auf einfache Weise und hinreichend genau erhält man mittelst einer fünfstelligen Logarithmentafel den reducirten Barometerstand durch die Formel $log\,x = log\,H - 0{\cdot}00010.t$, wenn $t$ Réaumur'sche Grade bezeichnet. Denn aus

$$x = H\left(1-\frac{t}{4440}\right) \text{ folgt}$$

$$log\,x = log\,H + log\left(1-\frac{t}{4440}\right), \text{ oder}$$

$$log\,x = log\,H - [log\,4440 - log\,(4440-t)].$$

Betrachtet man aber eine fünfstellige Logarithmentafel in der Nähe der Zahl 4440, so sieht man, daß, soweit der für $t$ zu erwartende Zahlwerth reicht, sämmtliche Differenzen je zweier auf einander folgender Logarithmen $= 10$ sind, wonach $log\ 4440 - log\ (4440 - t) = 0{\cdot}00010\ .\ t$, mithin $log\ x = log\ H - 0{\cdot}00010\ .\ t$ wird.

24. Die Correction ist $= -\frac{336{\cdot}45\ .\ 18}{4440} = -1{\cdot}37$, also der reducirte Stand $= 335{\cdot}08$ Linien.

Mittelst der Formel $log\ x = log\ H - 0{\cdot}00010\ .\ t$ erhält man (siehe vorige Auflösung b.) $x = 335{\cdot}07$ Linien.

25. 761·65 mm.

26. 320·86 Linien.

27. $x = L\,[1 + a_1\,(t_1 - t)]$, also die Correction $= L\,a_1\,(t_1 - t)$, welcher Werth zur Höhe der Quecksilbersäule zu addiren ist.

28. Aus Aufgabe 12 in IX. folgt

$$n = \frac{(3{\cdot}167\ ,\ 0{\cdot}000011\ .\ 20)\ .\ 86400}{2\ .\ 3{\cdot}167} = 9{\cdot}504 \text{ Schwingungen.}$$

29. Es sei (Fig. 35) bei einer bestimmten Temperatur die Länge sämmtlicher Eisenstangen $AB + CD + LM = e$, so ist $L = e - x$. Aendert sich nun die Temperatur um $t^0$, so geht die Länge des Pendels über in $L_1 = e\,(1 + a\,t) - x\,(1 + a_1\,t)$. Im vorliegenden Falle soll aber $L = L_1$, d. h. $e - x = e\,(1 + a\,t) - x\,(1 + a_1\,t)$ oder $a\,e = a_1\,x$ sein, und aus dieser Gleichung sowie aus $L = e - x$ bestimmt sich

Fig. 35.

$$x = \frac{a}{a_1 - a} \cdot L,\ e = \frac{a_1}{a_1 - a} \cdot L.$$

30. $x = \frac{0{\cdot}000012}{0{\cdot}00003 - 0{\cdot}000012} \cdot 2 = {}^4/_3$ Fuß.

31. In diesem Falle würden, wie man leicht findet, die inneren Stangen nahe 3 Fuß lang, also fast um die Hälfte länger sein müssen wie das ganze Pendel. Eine solche Anordnung, wie die in den beiden vorigen Aufgaben, ist also mit Eisen und Messing nicht thunlich, man muß deshalb, wenn man diese beiden Metalle zu einem Rostpendel benutzen will, mehrfache Verbindungen von abwechselnd eisernen und messingenen Stäben anwenden.

32. Bezeichnet $a$ den Coefficienten der linearen Ausdehnung des Glases, $a_1$ den Coefficienten der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers, sowie $x$ die Höhe des Quecksilbers im Gefäße, so stellt $a\ .\ L$ die Größe dar, um welche der Schwerpunkt der Flüssigkeit wegen der Verlängerung der Pendelstange

bei einer Temperaturerhöhung von einem Grad sinkt, dagegen $a_1 \cdot \frac{x}{2}$ die Größe, um welche dieser Schwerpunkt wegen der Ausdehnung der Quecksilbersäule zugleich gehoben wird. Soll also eine Compensation stattfinden, so muß

$$a \,.\, L = a_1 \cdot \frac{x}{2}, \text{ also } x = \frac{2\,a}{a_1} \cdot L \text{ sein.}$$

Setzt man $a = {}^1/_{116100}$, $a_1 = {}^1/_{6480}$, so erhält man $x =$ nahe ${}^1/_9\ L$.

33. $V_1 = V \,.\, 1{\cdot}0003$ bei $11{\cdot}5^0$, $= V$ bei $8{\cdot}9^0$, also gerade so groß, wie bei $0^0$, $= V \,.\, 1{\cdot}00733$ bei $50^0$ C.

34. Aus $124\ (1 + x) - 124\ (1 + 0{\cdot}000026 \,.\, 100) = 6\ (1 + x)$ folgt $x$ (d. h. die Ausdehnung der Volumeinheit des Wassers bei seiner Erwärmung von $0^0$ bis $100^0$ C.) $= 0{\cdot}05358$ oder etwas mehr als ${}^1/_{20}$ des Volumens bei $0^0$.

35. $V_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right) = V_0\ (1 + 0{\cdot}003665\ t)$.

36. Ist $V_0$ das gesuchte Volum bei $0^0$ C., so muß $V = V_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$, also $V_0 = \frac{V}{1 + \frac{t}{273}} = \frac{V}{1 + 0{\cdot}003665\,t}$ sein, also wenn $V_1$ das Volum bei $t_1^0$ C. bezeichnet, $V_1 = V_0 \left(1 + \frac{t_1}{273}\right) = \frac{V\left(1 + \frac{t_1}{273}\right)}{1 + \frac{t}{273}}$

$$= \frac{V\,(273 + t_1)}{273 + t} = \frac{V\,(1 + 0{\cdot}003665\,t_1)}{1 + 0{\cdot}003665\,t}.$$

Für Réaumur'sche Grade ist der Ausdehnungscoefficient ${}^1/_{218} = 0{\cdot}004581$ zu nehmen.

37. Aus $V_1 : x = P_2 : P_1$ (nach dem Mariotte'schen Gesetz) folgt

$$x = \frac{P_1 \,.\, V_1}{P_2} = \frac{P_1 \,.\, (1 + 0{\cdot}003665 \,.\, t_1) \,.\, V}{P_2 \,.\, (1 + 0{\cdot}003665 \,.\, t)}.$$

38. $6{\cdot}8325$ cbm.

39. Aus $2 = 1 + \frac{t}{273}$ folgt $t = 273^0$.

40. $4{\cdot}659$ cbm bei $0^0$; $6{\cdot}366$ cbm bei $100^0$.

41. An den Fenstern, dem in der Regel kältesten Theile der Stube, wo sich die über dem Ofen in die Höhe gestiegene erwärmte Luft zuerst senkt.

42. Aus Aufl. zu 37 folgt $x = \frac{0{\cdot}72 \,.\, 1{\cdot}5}{0{\cdot}76\ \ (1 + 0{\cdot}003665\,t)} = 1{\cdot}293$ l.

43. Das Gewicht von 1·293 *g* verändert sich wegen der Ausdehnung der Luft im Verhältniß von $(1 + 0{\cdot}003665\,t) : 1$ und wegen der Druckveränderung im Verhältniß von $0{\cdot}76 : b$, also ist

$$x = \frac{1{\cdot}293}{1 + 0{\cdot}003665\,t} \cdot \frac{b}{0{\cdot}76}\ g.$$

44. $x = {}^{15}/_{19} \cdot \dfrac{1 + 0{\cdot}003665\ .\ 200}{1 + 0{\cdot}003665\ .\ 10} \cdot 800 = 1056$ Cubikfuß.

46. Man wäge den Ballon gefüllt, pumpe alsdann die Luft aus, bis die Barometerprobe nur noch einen Druck $= h$ anzeigt, und wäge abermals. Bezeichnen $P$ und $p$ die beiden erhaltenen Gewichte, so ist $P - p$ das Gewicht des Gases, welches die Glaskugel unter dem Drucke $H - h$ und bei der Temperatur $t$ ausfüllen würde. Wenn nun der Druck $= 28''$ wäre, die Temperatur $t^0$ aber dieselbe bliebe, so würde dasselbe Volumen $(P - p)\dfrac{28}{H - h}$ wiegen, und wenn bei diesem Drucke die Temperatur nicht $= t^0$, sondern $= 0^0$ wäre, so würde die Dichtigkeit, also auch das Gewicht des Gases im Verhältniß von $1 : \left(1 + \dfrac{t}{273}\right)$ zunehmen, das gesuchte Gewicht also $= (P - p) \cdot \dfrac{28}{H - h} \cdot \left(1 + \dfrac{t}{273}\right)$ sein.

Wollte man auch die Ausdehnung des Glases am Ballon berücksichtigen, so müßte der vorher gefundene Ausdruck noch durch

$$2 + \frac{l}{38\,700} \text{ dividirt werden.}$$

47. Ist $x$ das Volum der Glaskugel bei $0^0$ in Cubikdecimeter, so ist das Gewicht der Luft bei $0^0$

$$= x\ .\ 1{\cdot}293\ g \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Durch Erwärmen der Kugel auf $100^0$ wird ihr Volum $x \cdot \left(1 + \dfrac{100}{38\,700}\right)$ Cubikdecimeter, also das Gewicht der in ihr enthaltenen gleichfalls auf $100^0$ erwärmten Luft (nach Aufg. 42)

$$= x \cdot \frac{1{\cdot}293}{1{\cdot}367} = x\ .\ 0{\cdot}948\ g \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

Die Ausdrücke (I) und (II) von einander abgezogen sind aber der Aufgabe gemäß $= 1$ g, also

$$x = \frac{1}{1{\cdot}293 - 0{\cdot}948} = 2{\cdot}9 \text{ cbdm.}$$

Also war das Gewicht der Luft bei $0^0 = 2{\cdot}9\ .\ 1{\cdot}293 = 3{\cdot}749$ g.

48. Es bezeichne $V$ den Rauminhalt des Ballons, sowie $v$ dasjenige Volumen, welches die *nach* dem Evacuiren im Ballon zurückgebliebene Luft *vor* dem Evacuiren einnahm.

Da nun der Lufttheil, welcher bei einem Drucke von 0·755 m den Raum $v$ einnahm, nach dem Evacuiren bis auf 0·005 m Druck den Raum $V$ einnimmt, so hat man nach dem Mariotte'schen Gesetz $\frac{V}{v} = \frac{0{\cdot}755}{0{\cdot}005}$, oder

$$\frac{V - v}{V} = \frac{0{\cdot}755 - 0{\cdot}005}{0{\cdot}755} = \frac{0{\cdot}75}{0{\cdot}755}.$$

Das Gewicht der ausgepumpten Luft vom Volumen $V - v$ ergiebt sich aus der ersten und dritten Wägung $= 567{\cdot}949 - 561{\cdot}291 = 6{\cdot}658$ g, und wenn man das Gewicht der überhaupt im Ballon enthaltenen Luft vom Volume $V$ mit $p$ bezeichnet, so ergiebt sich $\frac{p}{6{\cdot}658} = \frac{0{\cdot}755}{0{\cdot}75}$, oder $p = 6{\cdot}702$ g.

Also ist das Gewicht des leeren Gefäßes $= 567{\cdot}949 - 6{\cdot}702 = 561{\cdot}247$ g; folglich das Gewicht des Wassers $= 6133{\cdot}162 - 561{\cdot}247 = 5571{\cdot}915$ g. Nun hat ein Gramm Wasser bei einer Temperatur von 20·5° ein Volum von 1·001698 cbcm, folglich der Inhalt des Glasballons $V = 5571{\cdot}915 \,.\, 1{\cdot}001698 = 5581{\cdot}375$ cbcm.

**49.** Man wäge die Glasröhre erst leer und dann mit Quecksilber gefüllt. Die beiden Gewichte seien, in Grammen ausgedrückt, $p_1$ und $p_2$, so ist $p_2 - p_1$ das Gewicht der Quecksilbersäule von der Länge der Röhre. Dividirt man dies durch die Dichte $d$ des Quecksilbers bei $t^0$, so erhält man das verlangte Volumen in Cubikcentimetern ausgedrückt. Nun ist aber $d = \frac{13{\cdot}568}{1 + K \,.\, t'}$, wo $K$ den Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers bezeichnet,

$$\text{also } V = \frac{(p_2 - p_1)\,(1 + K \,.\, t)}{13{\cdot}568}.$$

**50.** Mittelst einer kleinen Quecksilbersäule, die man in die Röhre bringt und successiv verschiedene Lagen einnehmen läßt.

**51.** Man wäge den Apparat zuerst leer, fülle dann die Kugel und eine kleine Anzahl $n_1$ von Abtheilungen der Röhre mit Quecksilber und wäge abermals, schütte nun nochmals Quecksilber hinzu, bis $n_2$ Abtheilungen der Röhre angefüllt sind, und wäge zum dritten Mal. Sind nun $P$, $P_1$, $P_2$ die durch die drei Wägungen erhaltenen Gewichte und $N$ die gesuchte Zahl, so hat man, da $P_1 - P$ das Gewicht des zuerst in die Röhre gebrachten Quecksilbers, $P_2 - P_1$ das Gewicht des noch zugegossenen bedeutet, diese Gewichte aber wie die Volumina der Massen sich verhalten, welche bezüglich durch $N + n_1$, $n_2 - n_1$ ausgedrückt werden,

$$(P_1 - P) : (P_2 - P_1) = (N + n_1) : (n_2 - n_1)$$

und daraus

$$N = \frac{(P_1 - P)\,(n_2 - n_1)}{P_2 - P_1} - n_1.$$

**52.** Nimmt man das Volumen eines Röhrengrades als Volumeneinheit an und bezeichnet $N$ die Anzahl der Volumeneinheiten, welche die Kugel enthalten

soll, so hat man zur Bestimmung von $N$ aus den Bedingungen der Aufgabe die Gleichung $\frac{N \cdot 240}{6480} = 240$, worin $^1/_{6480}$ der scheinbare Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers ist, also $N = 6480$, folglich $x = {}^{6480}/_{240} = 27$, oder der Rauminhalt der Kugel muß 27mal so groß sein, als der der Röhre.

Nimmt man gleich das Volumen der Röhre als Einheit an, so daß $x$ das Volumen der Kugel bezeichnet, so hat man

$$\frac{x \cdot 240}{6480} = 1, \text{ also } x = 27.$$

**53.** Das Gewicht des Quecksilbers, welches die ganze Röhre ausfüllen würde, ist $= 260 \cdot {}^2/_{40} = 13$ g, also das Gewicht des Quecksilbers, welches 1 Grad anfüllt, $= {}^{13}/_{180}$ g. Das Volumen der anzublasenden Kugel ist $= {}^4/_3 \pi x^3$, wo $x$ den Halbmesser in Centimetern bezeichnet. Ist sie mit Quecksilber gefüllt, so nimmt dessen Volumen für jeden Centesimalgrad um ${}^4/_3 \pi x^3 \cdot {}^1/_{6480}$ cbcm zu, das Gewicht des Quecksilbers, welches 1 Grad ausfüllt, läßt sich also auch darstellen durch ${}^4/_3 \pi x^3 \cdot {}^1/_{6480} \cdot 13{\cdot}568$ g. Man hat also ${}^{13}/_{180} = {}^4/_3 \pi x^3 \cdot {}^1/_{6480} \cdot 13{\cdot}568$, woraus $x = 2{\cdot}02$ cm folgt.

**54.** Dem Luftdrucke von 334‴ entspricht (Tabelle 16) die Siedetemperatur von $99{\cdot}76^0$, folglich hat man $99{\cdot}76^0 : 100^0 = e : e_1$ und daraus $e_1 = \frac{100 \cdot e}{99{\cdot}76}$.

**55.** Zufolge der Aufgabe verhält sich das Volumen der in der Röhre befindlichen Luft bei der Temperatur des Schwefeldampfes zu dem Volumen derselben Luft bei $13^0$ wie $610 : (610 - 317)$, man hat also (vergl. Aufl. zu 36)

$$610 : 293 = (273 + x) : (273 + 13),$$

woraus folgt $x = 322{\cdot}8^0$.

**56.** Der Zwischenraum wird $= 5\ ({}^1/_{582} - {}^1/_{1131})$ Fuß $= {}^3/_5$ Linien groß sein.

**57.** a. Es sei $m$ die Graduirungszahl der Röhre, bis zu welcher das Quecksilber in derselben reicht, wenn die Röhre in schmelzendem Eise sich befindet, $m_1$ die dem Siedepunkte des Wassers entsprechende Zahl, so hat das Volumen des Quecksilbers von 0 bis $100^0$ C. um $m_1 - m$ Volumeneinheiten oder um $\frac{m_1 - m}{N + m}$ des ganzen Quecksilbervolumens zugenommen, der Coefficient der scheinbaren Ausdehnung ist also $= \frac{m_1 - m}{100\ (N + m)}$ $(= {}^1/_{6480})$.

b. Man bestimme das Gewicht $P$ des bei $0^0$ im Gefäß enthaltenen Quecksilbers und erwärme es dann. Ist bei $n^0$ C. das Gewicht der ausgeflossenen Quecksilbermenge $= p$, also $P - p$ das Gewicht des noch in dem

Gefäß enthaltenen Queckſilbers, ſo iſt für $n$ Grade des 100theiligen Thermometers die Volumenzunahme $= \frac{p}{P-p}$ des urſprünglichen Volumens, alſo der Coefficient der ſcheinbaren Ausdehnung $= \frac{p}{n(P-p)}$ $(= {}^1/_{6480})$.

58. Bezeichnet $D$ den Coefficienten der abſoluten Ausdehnung des Queckſilbers, $\Delta$ den Coefficienten der ſcheinbaren Ausdehnung des Queckſilbers, $K$ den Coefficienten der körperlichen Ausdehnung des Glaſes, $V$ das Volumen einer Queckſilbermenge bei der Temperatur $t$, $V_1$ das ſcheinbare Volumen dieſes Queckſilbers nach ſeiner Erwärmung in einem Glasgefäß um $1^0$ C., ſo läßt ſich das wirkliche Volumen des Queckſilbers bei der Temperatur $(t+1)^0$ ausdrücken ſowohl durch $V(1+D)$, als auch durch $V_1(1+K)$, und man hat alſo

$V(1+D) = V_1(1+K)$, folglich $D = \frac{V_1 - V}{V} + \frac{K \cdot V_1}{V}$.

Aber es iſt $\frac{V_1 - V}{V} = \Delta$, folglich $D = \Delta + \frac{K \cdot V_1}{V}$ oder annähernd $D = \Delta + K$, woraus $K = D - \Delta = {}^1/_{5550} - {}^1/_{6480} = {}^1/_{38700}$ folgt.

59. Bezeichnet man die Dichtigkeit des bis auf $t_1^0$ erwärmten Queckſilbers, nämlich $\frac{d_1}{1 + \frac{t_1 + t}{5550}}$, kurz mit $d_2$, ſo iſt die geſuchte Beſtimmungsgleichung

$$\frac{P_2}{d_2} = \left[\frac{P}{d} C + \frac{P_1}{d_1} D - \left(\frac{P}{d} + \frac{P_1}{d_1}\right) K\right](t_1 - t),$$

nämlich das Volumen des ausgefloſſenen Queckſilbers iſt gleich der Differenz zwiſchen der Ausdehnung des Metallſtabes nebſt der des Queckſilbers im Apparat und der Ausdehnung des Glaſes.

60. Der Bogen, welchen die Spitze des Zeigers $l_2$ beſchreibt, iſt $= \frac{l_2 \pi w}{180}$, und wenn man die Länge des Metallſtabes bei der Temperatur $t_1^0$ mit $L_1$ bezeichnet, alſo die Längenzunahme deſſelben mit $L_1 - L$, ſo hat man genau genug $(L_1 - L) : \frac{l_2 \pi w}{180} = l_1 : l_2$, alſo

$$L_1 - L = \frac{l_1 \pi w}{180},$$

folglich den Ausdehnungscoefficienten

$$= \frac{L_1 - L}{L(t_1 - t)} = \frac{l_1 \pi w}{L(t_1 - t)\ 180}.$$

61. Bezeichnet $\delta$ die geſuchte Ausdehnung der Volumeneinheit des Waſſers, wenn es von $0^0$ auf $100^0$ C. erwärmt wird, ſo hat man

$$186\,(1+\delta) - 186\,(1+0{\cdot}000026\,.\,100) = 9\,(1+\delta),$$

also $\delta = 0{\cdot}05358$ *).

62. Bezeichnet $\Delta_1$ den Coefficienten der scheinbaren Ausdehnung des Gases, so erhält man aus den Beobachtungen die Relation

$$(p_1 - p)\,(1 + \Delta_1\,.\,100) = p_1 \cdot \frac{b}{b_1 - \beta}$$

und daraus

$$\Delta_1 = \frac{p_1 b - (p_1 - p)\,(b_1 - \beta)}{100\,(p_1 - p)\,(b_1 - \beta)},$$

also, wenn $D_1$ den Coefficienten der absoluten Ausdehnung des Gases, sowie $K$ den cubischen Ausdehnungs-Coefficienten des Glases bedeutet (vergl. Aufgabe 58)

$$D_1 = \Delta_1 + K\ (= 0{\cdot}003665 = {}^1/_{273}).$$

63. Es sei $\delta$ die Ausdehnung der Volumeneinheit des Wassers beim Uebergange seiner Temperatur von 4° auf $t$°C. und $A$ der Coefficient der cubischen Ausdehnung des festen Körpers. Denken wir uns zuerst, der feste Körper habe beim Einsenken in das Wasser seine Temperatur $t$ behalten, das Wasser aber seine größte Dichtigkeit, also die Temperatur 4° C. gehabt, so würde der Gewichtsverlust des festen Körpers, d. h. das Gewicht des verdrängten Wassers, nicht $= p$, sondern $= p\,(1+\delta)$ **) gewesen sein. Hätte aber das Wasser seine größte Dichtigkeit und zugleich der feste Körper die Temperatur 0° gehabt, so würde dieser letztere nicht ein Volumen vom Gewicht $p\,(1+\delta)$, sondern ein $(1 + At)$ mal kleineres Volumen, also ein Volumen vom Gewicht $\frac{p(1+\delta)}{1+At}$ verdrängt haben, und das corrigirte specifische Gewicht ist also $= \frac{P\,.\,(1+At)}{p\,.\,(1+\delta)}$.

64. Man muß das Gewicht $P_1$ der Flüssigkeit auf die Temperatur 0°, das Gewicht $P$ des Wassers auf die Temperatur 4° reduciren, den Rauminhalt der Flasche aber auf die Temperatur 0° beziehen.

Es bezeichne $\delta_1$ die Ausdehnung der Volumeneinheit der Flüssigkeit bei der Temperaturzunahme von 0° bis $t_1^0$, $\delta$ dasselbe vom Wasser von 4° bis $t^0$, $K$ den cubischen Ausdehnungs-Coefficienten des Glases.

Das Gewicht $P_1$ der Flüssigkeit würde, wenn ihre Temperatur auf 0° herabsänke, die Flasche aber ihre Temperatur $t_1$ beibehielte, in das Gewicht $P_1\,(1+\delta_1)$ übergehen. Dieses Gewicht würde aber, wenn auch die Tem-

---

*) Die Ausdehnung des Wassers ist übrigens zwischen 0 und 100° ungleich (vergl. Aufgabe 33).

**) Denn die Dichtigkeit des Wassers bei 4° verhält sich zu seiner Dichtigkeit bei $t^0$ wie $(1+\delta) : 1$, und da sich bei gleichem Volumen die Gewichte verhalten wie die Dichtigkeiten, so hat man, wenn $p$ das Gewicht des verdrängten Wassers bei $t^0$ und $x$ dasselbe bei 4° bedeutet, $x : p = (1+\delta) : 1$, also $x = p\,(1+\delta)$.

peratur der Flasche von $t_1^0$ auf $0^0$ herabginge, $(1 + Kt_1)$ mal kleiner sein; das reducirte Gewicht der Flüssigkeit ist also

$$= P_1 \frac{1 + \delta_1}{1 + Kt_1}.$$

Das Gewicht des Wassers würde, wenn es bei der Wägung seine größte Dichtigkeit gehabt, die Flasche aber die Temperatur $t$ beibehalten hätte, nicht $= P$, sondern $= P(1 + \delta)$ gewesen sein; wenn aber zugleich die Flasche die Temperatur $0^0$ gehabt hätte, würde dies Gewicht $(1 + K.t)$ mal so wenig, also das reducirte Gewicht des Wassers $P \frac{1 + \delta}{1 + Kt}$ betragen haben.

Das corrigirte specifische Gewicht der Flüssigkeit ist demnach

$$= \frac{P_1 \frac{1 + \delta_1}{1 + Kt_1}}{P \frac{1 + \delta}{1 + Kt}} = \frac{P_1}{P} \cdot \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta} \cdot \frac{1 + Kt}{1 + Kt_1}.$$

**65.** Zunächst ist das Gewicht $x$ der Luft im Ballon bei $18^0$ C. und 754 mm Druck zu berechnen. Aus $x : 12{\cdot}01 = 754 : (754 - 5)$ ergiebt sich $x = {}^{754}/_{749} \cdot 12{\cdot}01 = 12{\cdot}09$ g. Dieses Gewicht auf den Barometerstand 760 mm reducirt, giebt ${}^{760}/_{754} \cdot 12{\cdot}09 = 12{\cdot}19$ g, und dieses auf $0^0$ C. reducirt, giebt $12{\cdot}19\ (1 + 0{\cdot}003665 \cdot 18) = 12{\cdot}995$ g. Also wiegt ein Liter oder Cubikdecimeter Luft bei $0^0$ und 760 mm Druck $1{\cdot}2995$ g*), oder ein Cubikcentimeter $0{\cdot}0012995$ g; da aber 1 cbcm Wasser 1 g wiegt, so ergiebt sich daraus die Dichtigkeit der Luft bei $0^0$ C. und 760 mm Barometerdruck $= 0{\cdot}0012995$ (nahe $= {}^1/_{770}$) der Dichtigkeit des Wassers.

**66.** Das Gasvolumen $V$ wird unter dem Drucke von $0{\cdot}76$ m $= V \cdot \frac{b}{0{\cdot}76}$ und bei der Temperatur $0^0 = V \frac{b}{0{\cdot}76} \cdot \frac{273}{273 + t}$. Der vorhergehenden Auflösung gemäß wiegt aber ein Liter Luft von demselben Druck und derselben Temperatur $1{\cdot}2995$ g, also eine Luftmenge vom Volumen des Gases $V \cdot 1{\cdot}2995 \cdot \frac{b}{0{\cdot}76} \cdot \frac{273}{273 + t}$ g, folglich ist die gesuchte Dichtigkeit des Gases, wenn $P$ Gramme bedeutet,

$$= \frac{P}{V \cdot 1{\cdot}2995 \cdot \frac{b}{0{\cdot}76} \cdot \frac{273}{273 + t}} = \frac{P \cdot 0{\cdot}76 \cdot (273 + t)}{V \cdot 1{\cdot}2995 \cdot b \cdot 273}.$$

**67.** Die Dichtigkeit der Luft bei $0^0$ C. und 760 mm Barometerstand ist (Tab. 5) $= {}^1/_{773}$, bei der Temperatur $t$ also $= {}^1/_{773} \cdot \frac{273}{273 + t}$, und

*) Vergl. Tab. 5, C im Anhang.

beim Barometerstande $b$ folglich $= {}^1/_{773} \cdot \frac{273}{273 + t} \cdot \frac{b}{760}$, oder

$$= \frac{0{\cdot}00129318}{1 + 0{\cdot}003665\,t} \cdot \frac{b}{760}.$$

68. a. Ein Cubikdecimeter atmosphärische Luft wiegt (siehe Tab. 5) bei 0° C. und 760 mm Druck 1·29318 g, folglich ein Cubikmeter bei derselben Temperatur und demselben Druck 1·29318 Kg, also bei $t°$ C. und $b$ Millimeter Druck

$$\frac{1{\cdot}29318}{1 + 0{\cdot}003665\,t} \cdot \frac{b}{760} \text{ Kg}$$

b. Da ein preußischer Cubikfuß $= 0{\cdot}030916$ Cubikmeter und 1 Kg $= 2$ preußische Pfund ist, so wiegt ein Cubikfuß Luft bei der Normaltemperatur und dem Normaldrucke $0{\cdot}030916 \,.\, 2 \,.\, 1{\cdot}29318 = 0{\cdot}07996$ Pfd. (nahe 2·4 Loth), also bei $t°$ C. und dem Drucke von $b$ pariser Zoll

$$\frac{0{\cdot}07996}{1 + 0{\cdot}003665\,t} \cdot \frac{b}{28} \text{ Pfd.}$$

---

## Auflösungen zu XXI.

1. $m \,.\, t$ Calorien.
2. $(m_1 + m_2)\,t = m_1\,t_1 + m_2\,t_2$.
3. Aus $(7 + 3)\,x = 7 \,.\, 25 + 3 \,.\, 65$ folgt $x = 37°$.
4. $\frac{6 \,.\, 20 + 4 \,.\, 50}{6 + 4} = 32°$.
5. Das Wasser hat $18 \,.\, 15$, das Eisen $x \,.\, 10 \,.\, 100$ Calorien, wenn $x$ die specifische Wärme des Eisens bezeichnet, die Summe der Calorien ist also $= 18 \,.\, 15 + x \,.\, 10 \,.\, 100$. Nach der Mischung hat aber das Wasser $18 \,.\, 20$, das Eisen $x \,.\, 10 \,.\, 20$ Calorien und die Summe dieser muß offenbar der vorhergehenden gleich sein. Man hat also $18 \,.\, 15 + x \,.\, 10 \,.\, 100 = 18 \,.\, 20 + x \,.\, 10 \,.\, 20$, woraus folgt $x = 0{\cdot}1125$.

Andere Auflösung: Die 10 Kg Eisen geben $10 \,.\, (100 - 20) \,.\, x$ Calorien ab, die 18 Kg Wasser dagegen erhalten $18 \,.\, (20 - 15)$ Calorien, es muß also $10 \,.\, (100 - 20)\,x = 18 \,.\, (20 - 15)$ sein oder $x = 0{\cdot}1125$, wie vorher.

6. Aus $7 + 100 \cdot x = 10 + x \cdot 10$, oder aus $10 - 7 = x\,(100 - 10)$ folgt $x = {}^1/_{30}$.

7. Man erhält je nach der Ableitung (vergl. Auflösung zu 5)

$$w_1 m_1 t_1 + w_2 m_2 t_2 = w_1 m_1 t + w_2 m_2 t,$$

oder $$w_1 m_1 (t - t_1) = w_2 m_2 (t_2 - t),$$

woraus sich, wenn sechs der sieben Größen gegeben sind, die siebente finden läßt, z. B. $t = \dfrac{w_1 m_1 t_1 + w_2 m_2 t_2}{w_1 m_1 + w_2 m_2}$.

8. a. $x = \dfrac{8 \cdot 100 + {}^1/_{30} \cdot 10 \cdot 22{\cdot}5}{8 + {}^1/_{30} \cdot 10} = 96{\cdot}9^0$.

b. $x = \dfrac{{}^1/_{30} \cdot 15 \cdot 10 + 0{\cdot}1138 \cdot 8 \cdot 60}{{}^1/_{30} \cdot 15 + 0{\cdot}1138 \cdot 8} = 42{\cdot}3^0\,\text{C}.$

9. Nimmt man aus Tabelle 14 die specifische Wärme des Platins $= 0{\cdot}037$, so ergiebt sich aus $0{\cdot}037 \cdot 0{\cdot}1 \cdot x + 9 = 0{\cdot}037 \cdot 0{\cdot}1 \cdot 13 + 13$

$$x = 1094^0\,\text{C}.$$

10. Bezeichnen $p_1$ und $p_2$ die gesuchten Kilogramme, so erhält man aus den beiden Gleichungen $w_1 p_1 (t - t_1) = w_2 p_2 (t_2 - t)$ und $p_1 + p_2 = p$:

$$p_1 = \frac{w_2 p (t_2 - t)}{w_1 (t - t_1) + w_2 (t_2 - t)},$$

$$p_2 = \frac{w_1 p (t - t_1)}{w_1 (t - t_1) + w_2 (t_2 - t)}.$$

11. Das Wasser nimmt nach dem Eintauchen der Kupfermasse $m_2$ an Wärme auf $M (t - t_1)$, das Gefäß $w m_1 (t - t_1)$; dagegen verliert die eingetauchte Kupfermasse an Wärme $w m_2 (t_2 - t)$, woraus die Gleichung folgt:

$$M (t - t_1) + w m_1 (t - t_1) = w m_2 (t_2 - t),$$

folglich $$w = \frac{M (t - t_1)}{m_2 (t_2 - t) - m_1 (t - t_1)}.$$

12. Aus $w \cdot 3 \cdot 100 = 0{\cdot}38{\cdot}80$*) folgt $w = 0{\cdot}10133 \ldots$

13. Aus $w \cdot 5 \cdot 80 = 0{\cdot}57 \cdot 80$ folgt $w = 0{\cdot}114$.

14. Wie 7 : 5 oder 1·4 : 1; nach genaueren Bestimmungen wie 1·421 : 1.

15. Nehmen wir diejenige Wärme, welche nöthig ist, um 1 Kg Wasser um $1^0$ zu erhöhen, als Wärmeeinheit (Calorie) an, so haben die 7 Kg Wasser von $100^0$ C. $7 \cdot 100$ Calorien und die nach der Mischung entstandenen 10 Kg Wasser von $46{\cdot}2^0$ C. $10 \cdot 46{\cdot}2$ Calorien. Zur Schmelzung der 3 Kg Eis sind also $700 - 462 = 238$ Calorien erforderlich oder für jedes Kilogramm ${}^{238}/_3 = 79{\cdot}3$ Calorien, d. h. eben so viel Wärme, als

*) Die latente Wärme des Wassers ist nach neueren Untersuchungen $= 79{\cdot}25^0$ C. (nach älteren Bestimmungen $75^0$ C.).

nöthig ist, um 1 Kg Wasser von 0° bis zu 79·3° C. zu erwärmen. Oder, wenn $x$ die gesuchte Anzahl Wärmegrade bezeichnet, so folgt aus $3\,x + 10 \,.\, 46{\cdot}2 = 7 \,.\, 100$ der Werth von $x = 79{\cdot}3^0$ C.

16. Die 4 Kg siedendes Wasser enthalten $4 \,.\, 100$ Calorien, die 3 Kg Eis von 0° bedürfen aber, um Wasser von 0° zu werden, $3 \,.\, 80$ Calorien. Der Rest von $400 - 240 = 160$ Calorien vertheilt sich nun gleichmäßig auf die 7 Kg Wasser, welche also die Temperatur von $^{160}/_7 = 22^6/_7{}^0$ erhalten.

Oder, wenn $x$ die gesuchte Temperatur ist, so erhält man aus $3 \,.\, 80 + 7\,x = 400$ wieder $x = 22^6/_7{}^0$.

17. Aus $(6 + x) \,.\, 10 + x \,.\, 80 = 6 \,.\, 95$ folgt $x = 5^2/_3$ Kg.

18. Die latente Wärme des Wassers $= 80^0$, die des Wasserdampfes $= 540^0$.

19. Zur Erhöhung der Temperatur der 120 Kg Wasser von 30° auf 40° waren $120 \,.\, 10 = 1200$ Calorien erforderlich. Diese wurden durch die Verdichtung der 2 Kg Wasserdampf und Abkühlung des gebildeten Wassers von 100° auf 40°, also um 60° geliefert. Bezeichnet $x$ die latente Wärme eines Kilogramms Wasserdampf, so läßt sich also die vom Dampfe abgegebene Wärme durch $2\,x + 2 \,.\, 60$ Calorien ausdrücken; folglich ist $2\,x + 2 \,.\, 60 = 1200$, also $x = 540$ Calorien.

20. Von 100°; denn 1 Kg Wasserdampf von 100° C. enthält 640 Calorien, davon 540 gebunden, welche hier beim Uebergange des Dampfes in den tropfbaren Zustand an die 5·4 Kg Wasser abgegeben werden und gerade hinreichen, um diese bis auf 100° zu erwärmen.

21. Die 4 Kg Wasserdampf enthalten $4 \,.\, 640$ Calorien und diese vertheilen sich gleichmäßig auf $60 + 4$ Kg Wasser, so daß also jedes Kilogramm $^{2560}/_{64} = 40$ Wärmeeinheiten enthält, oder die ganze Masse eine Temperatur von 40° zeigt.

Oder auch, wenn $x$ die gesuchte Temperatur bezeichnet, so ergiebt sich aus $60 \,.\, x = 4 \,.\, (640 - x)$ wieder $x = 40^0$.

22. Aus $60\,(x - 16) = 4\,(640 - x)$ folgt $x = 55^0$.

23. Die Wärme des Wassers soll um $28 - 11 = 17^0$ C. erhöht werden, man braucht also noch $17 \,.\, 300 = 5100$ Calorien. 1 Kg Dampf von 121° giebt aber, in Wasser von 28° verdichtet, $(121 + 519) - 28 = 612$ Calorien ab. Die Anzahl der nöthigen Kilogramme Dampf ist also $= {}^{5100}/_{612} = 8^1/_3$ Kg.

Oder, da $300 \,.\, (28 - 11) = x\,(640 - 28)$ sein muß, so ist $x = 8^1/_3$ Kg und man erhält dann $308^1/_3$ Kg Wasser von 28° C.

24. Nehmen wir an, ein Kilogramm Wasser sei bis $-10^0$ C. erkaltet, und es finde dann plötzlich Eisbildung statt. Die gesammte latente Wärme des Wassers kann natürlich nicht augenblicklich frei werden, wohl aber eine solche Menge, welche zur Erhöhung der Temperatur des Wassers von 10° C. auf 0° erforderlich ist, also 10 Calorien, und da in der angenommenen Wasser-

masse 80 Calorien an latenter Wärme vorhanden sind, so kann $^1/_8$ des Wassers augenblicklich erstarren.

25. Nach Tabelle 15 des Anhanges schmilzt das Zinn bei 235° C. und die dazu erforderliche latente Wärme ist = 14·3, d. h. 14·3mal so viel, als nöthig ist, um eine dem Zinn gleiche Gewichtsmenge Wasser um einen Grad zu erhöhen. Nach Tabelle 13 ist aber die specifische Wärme des Zinns = 0·0562, die zum Schmelzen desselben erforderliche latente Wärme würde also dieselbe Gewichtsmenge Zinn um $\frac{14·3}{0·0562} = 255$ Wärmegrade erhöhen (d. h. es würde die Temperatur des Zinns um eine Wärmemenge zunehmen, die 255mal so groß ist, als diejenige, welche die Temperatur des Zinns um 1° erhöht). Die Temperatur würde demnach = 235 + 255 = 490° C. sein.

26. Um $x$ Kg Aether von 0° bis 35·6° C. zu erwärmen, bedarf man, da die specifische Wärme des Aethers (Tabelle 13 des Anhanges) = 0·52 ist, $x$ . 35·6 . 0·52 Calorien. Nun ist (nach Tabelle 16) die beim Verdampfen von 1 Kg Aether gebundene Wärme = 91·1 Calorien, es muß also $x$ . 35·6 . 0·52 = 91·1, folglich $x$ = 4·92 Kg sein.

---

## Auflösungen zu XXII.

1. Ein Volumen Luft = 1 dehnt sich von 0° bis 100° auf ein Volumen $= 1 + \frac{100}{273} = \frac{373}{273}$ bei gleichbleibendem Druck aus, also ist die Dichtigkeit der Luft bei 100° $= \frac{273}{373 . 770}, = \frac{1}{1052}$, folglich verhält sich die Dichte des Wasserdampfes zu der der Luft, beide bei 100° C. und 760 mm Druck, wie $\frac{1}{1700} : \frac{1}{1052} = 0·62 : 1$, d. h. näherungsweise wie 5 : 8, und man kann sich erlauben, dieses Verhältniß auch auf andere der Luft und dem Wasserdampfe gemeinschaftliche Temperaturen und Spannkräfte auszudehnen.

2. Mittelst der aus Tabelle 9 c des Anhangs entnommenen Dichten des Sauerstoffs und Wasserstoffs ergiebt sich die Dichte des Wasserdampfes $= \frac{1·1056 + 2 . 0·0688}{2} = 0·62$.

3. Die Spannkraft des Wasserdampfes von $0^0$ ist (Tabelle 18) $= 5$ mm; Luft von dieser Spannkraft würde aber eine Dichtigkeit von $^5/_{760}$ der Dichtigkeit der Luft von mittlerem Atmosphärendruck, also von $^1/_{770} \cdot ^5/_{760}$ der Dichte des Wassers haben, folglich ist (da sich die Dichtigkeit des Wasserdampfes von beliebiger Temperatur zur Dichtigkeit der Luft von derselben Temperatur und demselben Drucke, wie 5 : 8 verhält) die Dichtigkeit des Wasserdampfes von $0^0$, auf die letztere Einheit bezogen, $= ^5/_8 \cdot ^1/_{770} \cdot ^5/_{760} = 0{\cdot}0000054$.

4. Ein Volumen Luft $= 1$ dehnt sich von $0^0$ bis $40^0$ auf ein Volumen $= 1 + ^{40}/_{273} = ^{313}/_{273}$ bei einem Atmosphärendruck aus, also ist die Dichte des Wasserdampfs:

bei $40^0$ C. und 760 mm Druck $= ^5/_8 \cdot \frac{273}{313}$ der Dichte der Luft bei $0^0$,

bei $40^0$ C. und 760 mm Druck $= ^5/_8 \cdot \frac{273}{313 \cdot 770}$ d. Dichte d. Wassers bei $0^0$,

bei $40^0$ C. und 53 mm Druck $= ^5/_8 \cdot \frac{273}{313 \cdot 770} \cdot \frac{53}{760} =$ ungefähr $\frac{1}{20\,000}$ der Dichte des Wassers bei $0^0$.

5. Nach der Auflösung zu 68 in XX. wiegt ein Cubikfuß Luft bei einer Temperatur von $t^0$ C. und einem Drucke von $b$ Millimetern $\frac{0{\cdot}08035}{1 + 0{\cdot}003665 \cdot t} \cdot \frac{b}{760}$ Pfd. Da nun aus Tabelle 18 des Anhanges für gesättigten Wasserdampf von $50^0$ und $100^0$ C. der Druck $b$ bezüglich $= 88{\cdot}742$ und 760 mm ist, so ergiebt sich das Gewicht eines Cubikfußes Wasserdampf

a) von $50^0$ C. $= ^5/_8 \cdot \frac{0{\cdot}08035}{1 + 0{\cdot}003665 \cdot 50} \cdot \frac{88{\cdot}742}{760} = 0{\cdot}004956$ Pfd.

b) von $100^0$ C. $= 0{\cdot}03675$ Pfund $= 1{\cdot}1025$ Loth.

6. Die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes von $25^0$ C. ist (da die entsprechende Expansivkraft des Dampfes $= 23{\cdot}1$ mm)

$$= ^5/_8 \cdot \frac{23{\cdot}1}{760} \cdot \frac{273}{298 \cdot 770} = 0{\cdot}000023,$$

also das Gewicht eines Cubikfußes desselben

$$= 61{\cdot}75 \cdot 0{\cdot}000023 = 0{\cdot}00142 \text{ Pfd.}$$

7. Wasserdampf, der nicht mit Wasser in Verbindung ist, verhält sich bei einer Temperaturerhöhung gerade wie die Luft. Wird aber Luft von $100^0$ C. bis auf $121^0$ C. erwärmt, ohne daß eine Vergrößerung des Volumens erfolgen kann, so nimmt dadurch die Spannkraft der Luft oder ihr Druck gegen die Gefäßwände in dem Verhältniß von $\left(1 + \frac{100}{273}\right) : \left(1 + \frac{121}{273}\right)$ oder 373 : 394 zu (vergl. XX, 45). Man hat also, da die Spannkraft

des Wasserdampfes von $100^0 = 760$ mm ist und wenn $x$ die gesuchte Spannkraft dieses Wasserdampfes bei $121^0$ bezeichnet,

$$760 : x = 373 : 394 \text{ oder } x = \frac{760 \cdot 394}{373} = 803 \text{ mm}.$$

8. Das Volumen einer Luftmenge nimmt bei der Erwärmung von $100^0$ auf $121^0$ C., der vorhergehenden Auflösung gemäß, im Verhältniß von $373 : 394$ zu, und da sich der Wasserdampf im vorliegenden Falle gerade so verhält, so hat man aus $1700 : x = 373 : 394$ den gesuchten Raum

$$= \frac{394 \cdot 1700}{373} = \text{beinahe } 1800 \text{ Cubikfuß}.$$

9. Weil die Dämpfe bei einer Temperaturerhöhung nicht bloß sich mehr auszudehnen streben, sondern auch dichter werden, indem sich eine größere Menge von Dampf aus dem Wasser entwickelt.

10. Die Dichte der Luft bei $121^0$ C. und gewöhnlichem Druck ist (vergl. Auflösung zu 4) $= \frac{273}{394 \cdot 770}$ der Dichte des Wassers, also bei $121^0$ C. und doppeltem Atmosphärendrucke $= \frac{2 \cdot 273}{394 \cdot 770}$ der Dichte des Wassers, also die Dichte des Wasserdampfes von $121^0$ C. $= {}^5/_8 \cdot \frac{2 \cdot 273}{394 \cdot 770} = \frac{1}{889}$ der Dichte des Wassers, also nicht ganz das Doppelte der Dichte des Wasserdampfes von $100^0$ C.

11. 889 Cubikfuß.

12. Wasserdampf von einer Spannung von 5 Atmosphären hat eine Temperatur von $153^0$ C., also ist seine Dichte

$$= {}^5/_8 \frac{5 \cdot 273}{426 \cdot 770} = \frac{1}{384} \text{ der Dichte des Wassers.}$$

Ein Cubikfuß dieses Dampfes wiegt also $\frac{1}{384} \cdot 61{\cdot}75 = 0{\cdot}161$ Pfd.

13. Man findet nach der Holzmann'schen Interpolationsformel $p = 1078$ mm Queckſilberhöhe, was einem Drucke von ${}^{1078}/_{760} = 1{\cdot}392$ Atmosphären entspricht.

14. Der Druck ist gleich dem von $7{\cdot}38$ Atmosphären, also auf den Quadratzoll $= 7{\cdot}38 \cdot 14 = 103{\cdot}32$ Pfd.

15. Gesetzt, der Dampf habe im Behälter eine Temperatur von $135^0$ C., seine Expansivkraft sei also $= 3$ Atmosphären. Beim Ausströmen aus dem Ventile dehnt er sich aus, bis seine Expansivkraft $= 1$ Atmosphäre ist. Durch diese Ausdehnung erhöht sich die latente Wärme, die im Behälter $640 - 135 = 505^0$ C.*) betrug, auf $540^0$, so daß dem ausströ-

*) Da die latente Wärme eines Körpers immer dieselbe Summe giebt, und zwar beim Wasserdampf immer $640^0$.

menden Dampfe nur noch 100° freie Wärme bleiben. Wegen der erlangten Geschwindigkeit der Dampftheilchen geht aber die Ausdehnung über diese Grenze hinaus und deshalb, sowie wegen der Mischung des ausströmenden Dampfes mit der kälteren Luft wird seine Temperatur viel tiefer als 100°.

16. Da die beobachteten Siedepunkte (99·5° und 97° C.) nach Tabelle 16 im Anhange den Luftdrücken von bezüglich 330·85 und 301·48 par. Linien entsprechen, so findet man mit Anwendung der Mayer'schen Formel (Auflösung zu 25 in XVII) den gesuchten Höhenunterschied = 60 000 (*log* 330·85 — *log* 301·48) = 2422 par. Fuß.

17. 10 000 cbcm Luft wiegen $^{10000}/_{770} = 13$ g, da 1 cbcm Wasser 1 g wiegt und die Dichtigkeit der Luft = $^1/_{770}$ derjenigen des Wassers beträgt. Der Ballon wiegt also luftleer 1015 — 13 = 1002 g, folglich der Dampf 1010 — 1002 = 8 g. Da sich nun bei gleichem Volumen die Dichtigkeiten wie die absoluten Gewichte verhalten, so erhält man, die Dichtigkeit der Luft von 0° = 1 gesetzt, aus $x : 1 = 8 : 13$, $x = {}^8/_{13}$.

18. Die Druckfläche des Kolbens beträgt 214 □Zoll, sein Weg in jeder Secunde $\frac{48 \cdot 4}{60} = 3^1/_5$ Fuß und der wirksame Dampfdruck = $16^1/_2 - 1^1/_2 = 15$ Pfd. auf den □Zoll, folglich der theoretische Effect = 214 . 15 . $3^1/_5$ = 10 272 Fußpfund oder = $^{10272}/_{510} = 20$ Pferdekräfte.

Nehmen wir, wie gewöhnlich, die Hälfte des theoretischen Effectes als Nutzeffect, so ist dieser 10 Pferdekräfte.

Zur Erzeugung dieses Effects sind $\frac{214}{144} \cdot 4 \cdot \frac{48}{60} = 4^3/_4$ Cubikfuß Wasserdampf von etwas über 100° in der Secunde, oder $\frac{4^3/_4 \cdot 3600}{1700}$ = etwas über 10 Cubikfuß Wasser in der Stunde nöthig. (Allgemein pflegt man bei den jetzt gebräuchlichsten Watt'schen Dampfmaschinen für jeden in der Stunde verdampften Cubikfuß Wasser eine Pferdekraft als Nutzeffect anzunehmen.)

19. Die bewegende Kraft des Dampfes ist, da der Druck der Luft ihm entgegenwirkt, 5 — 1 = 4 Atmosphären, also da der Dampfkolben einen Querschnitt von 72 □Zoll hat, 4 . 15 . 72 = 4330 Pfd., folglich der theoretische Effect der Maschine (bei einer Geschwindigkeit des Kolbens von 5 Fuß in der Secunde) = 4320 . 5 = 21 600 Fußpfund oder ungefähr 42 Pferdekräfte. Als Nutzeffect kann man also 21 Pferdekräfte annehmen.

Zur Hervorbringung dieses Effectes sind in jeder Secunde $2^1/_2$ Cubikfuß Dampf von 5 Atmosphären Spannung nöthig. Ein Cubikfuß Dampf von dieser Spannung wiegt aber (nach Auflösung zu 12) $^{11}/_{64}$ Pfd., also $2^1/_2$ Cubikfuß wiegen $^{55}/_{128}$ Pfd. In jeder Stunde werden also 3600 . $^{55}/_{128}$ = 1547 Pfd. Dampf oder Wasser, oder $^{1547}/_{66}$ = beiläufig 23 Cubikfuß Wasser verbraucht.

**20.** Annähernd, aber etwas zu groß, findet man den alsdann stattfindenden mittleren Druck durch das folgende gewöhnliche Verfahren:

der Druck während des ersten Viertelhubs ist . . . = 16·5 Pfd.

der Druck während des zweiten Viertelhubs

ist im Mittel $= \frac{16{\cdot}5 + 8{\cdot}25\ ^{*})}{2} = 12{\cdot}38$ Pfd.

der Druck während des dritten Viertelhubs

ist im Mittel $= \frac{8{\cdot}25 + 5{\cdot}5}{2} = 6{\cdot}88$ Pfd.

der Druck während des vierten Viertelhubs

ist im Mittel $= \frac{5{\cdot}5 + 4{\cdot}1}{2} = 4{\cdot}8$ Pfd.

40·56 Pfd.

Hieraus der mittlere Druck $= \frac{40{\cdot}56}{4} = 10{\cdot}14$ Pfd. und nach Abzug des Gegendruckes von 1·5 Pfund der mittlere wirksame Druck auf den □ Zoll = 8·64 Pfunde. Also der theoretische Effect = 214 . 8·64 . 3·2 = 5917 Fußpfund = 11·6 Pferdekräfte und folglich der Nutzeffect = 5·8 Pferdekräfte (also etwas mehr als die Hälfte des Nutzeffectes, welchen man mittelst derselben Maschine ohne Expansion erhält, während doch nur der vierte Theil des zur letztern erforderlichen Dampfes verbraucht wird, woraus eine bedeutende Ersparung an Brennmaterial hervorgeht).

**21.** Ein Pfund Wasser giebt $^1/_{66}$ . 1700 = 25·8 Cubikfuß Wasserdampf von 100° und kann also durch diesen einen Kolben von 1 □ Fuß, welcher mit 144 . 15 = 2160 Pfd. belastet ist, 25·8 Fuß hoch heben, folglich ist die Arbeit dieses Dampfes = 25·8 . 2160 = 55 728 Fußpfund.

**22.** Ein Cubikfuß mit Wasserdampf völlig gesättigter Luft enthält eben so viel Dampf, als derselbe Raum im luftleeren Zustande, also (nach Aufgabe 6) $^5/_8 \cdot \frac{61{\cdot}75}{770} \cdot \frac{23{\cdot}1}{760} \cdot \frac{273}{298} = 0{\cdot}001396$ Pfd.

**23.** $^5/_8 \cdot \frac{61{\cdot}75}{770} \cdot \frac{10{\cdot}7}{760} \cdot \frac{273}{298} = 0{\cdot}000646$ Pfd. = 0·01938 Loth.

**24.** Das Gewicht der in einem bestimmten Raume enthaltenen Dampfmenge bei 13° C. verhält sich zu dem bei 24° C., wenn in beiden Fällen der Raum mit Dämpfen gesättigt ist, wie die diesen Temperaturen entsprechenden Spannkräfte der Dämpfe, d. h. im vorliegenden Falle wie

*) Hierbei ist angenommen, daß der Druck des Dampfes zu Ende des zweiten Viertelhubs $\frac{16{\cdot}5}{2} = 8{\cdot}25$ Pfd., zu Ende des dritten Viertelhubs $\frac{16{\cdot}5}{3} = 5{\cdot}5$ Pfd. u. s. w. betrage, weil er einen zweimal, dreimal u. s. w. so großen Raum einnimmt; dies ist jedoch nicht ganz richtig, weil die Temperatur des Dampfes schon durch die Expansion abnimmt, der Dampf also z. B. bei der halben Dichte weniger als halb so viel Spannung hat.

11·4 zu 21·8. Demnach beträgt in unserer Aufgabe die vorhandene Dampfmenge $\frac{11{\cdot}4}{21{\cdot}8}$ der möglichen Dampfmenge, oder, wie es oft ausgedrückt wird, $\frac{11{\cdot}4}{21{\cdot}8} \cdot 100 = 52$ Proc. der möglichen Dampfmenge.

25. Die 144 000 Millionen Cubikfuß enthalten, da nach Tabelle 18 die Dichtigkeit des Wasserdampfes von $20^0 = 0{\cdot}000017$ ist, 17 . 144 000 = 2 448 000 Cubikfuß Wasser. Wenn aber die Temperatur auf $11^0$ herabsinkt, so können, wie man auf gleiche Weise findet, nur noch 10 . 144 000 Cubikfuß als Wasserdampf zurückbleiben, es müssen also 1 008 000 Cubikfuß als Regen niedergeschlagen werden, die sich auf eine Fläche von 144 Millionen Quadratfuß vertheilen.

26. (13 — 10) . 144 000 = 432 000 Cubikfuß.

27. Sie beruht 1) darauf, daß ein bestimmter Raum bei einer bestimmten Temperatur auch nur eine bestimmte Menge Wasser in Dampfform aufnehmen kann, wovon also stets ein Theil in Nebelgestalt übergehen muß, wenn die Temperatur sinkt, sowie 2) darauf, daß die Wärmecapacität der Luft mit ihrer Verdünnung zunimmt. Aus letzterem Grunde nimmt die Temperatur der Luft unterm Recipienten nach den ersten Kolbenstößen ab, und folglich muß nach 1) ein Theil des Wasserdampfes in Nebelform sich niederschlagen (wenn nämlich die Luft völlig oder nahezu mit Wasserdampf gesättigt war). Da nun mit der Luft immer auch ein Theil des Wasserdampfes aus dem Recipienten geschafft wird, so kann sich der Nebel nach weiteren Kolbenstößen wieder in Dampfform auflösen.

28. Durch Erhitzen wird ein Theil der Feuchtigkeit herausgeschafft, nach dem Erkalten schlägt sich aber wieder ein Theil an die Wände des Gefäßes nieder. Wenn man aber ein Rohr in das erhitzte Glas steckt und saugt, so gelingt die Austrocknung viel rascher und besser.

29. Im ersten Falle, wenn es draußen kälter ist als in der Stube, im zweiten, wenn es in der Stube kälter ist, als draußen.

30. Weil Oel fast gar nicht verdunstet.

# Auflösungen zu XXIII.

1. $5 \cdot 7800 = 39\,000$ Calorien (nach Tabelle 19)*).

2. Für 1 Thlr. erhält man $^{1500}/_{12} = 125$ Kg Holz, die bei ihrer Verbrennung $125 \cdot 3000 = 375\,000$ Calorien erzeugen, dagegen für dasselbe Geld $\frac{350}{2^1/_3} = 150$ Kg Torf, welche $150 \cdot 1500 = 225\,000$ Calorien geben; der Brennwerth des Holzes verhält sich also zu dem des Torfes wie 5 : 3.

3. Beim Verbrennen von 1 Kg Steinkohle entstehen 6000 Calorien, zum Verdampfen von 6 Kg Wasser sind aber nur $6 \cdot 640 = 3840$ erforderlich, folglich gehen verloren $6000 - 3840 = 2160$ Calorien. (Ueberhaupt rechnet man die in den besten Oefen benutzbare Wärme nur zu $^3/_5$ der entwickelten.)

4. $\frac{300}{6} = 50$ Kg in der Stunde, wenn man, wie gewöhnlich, 1 Kg Steinkohle als zum Verdampfen von 6 Kg Wasser erforderlich annimmt.

5. 1 Kg Kohlenstoff bedarf zu seiner vollständigen Verbrennung 2·65 Kg oder etwa 1·85 cbm Sauerstoff, also, da 1 cbm Luft nur 0·21 cbm Sauerstoff enthält, $\frac{1{\cdot}85}{0{\cdot}21} = 8{\cdot}8$ obm Luft. Hiernach würde also durch 1 Kg Steinkohle $^6/_7 \cdot 8{\cdot}8 = 7{\cdot}5$ cbm Luft verbraucht. Weil aber gewöhnlich nur die Hälfte der in den Rost dringenden Luft ihren Sauerstoff abgiebt, so muß man das Doppelte der eben berechneten Zahl nehmen.

6. Da sich der Wärmeeffect der Verbindung aus den Wärmeeffecten der Bestandtheile zusammensetzt, der Wärmeeffect des Wasserstoffs aber (Tabelle 19) 3 mal so groß ist, als der des Kohlenstoffs, so hat man $a = 3w + k$.

7. Wenn der ganze Sauerstoffgehalt als mit Wasserstoff schon verbunden betrachtet werden muß, so hat man, da 1 Gewichtstheil Sauerstoff mit $^1/_8$ Gewichtstheil Wasserstoff im Wasser verbunden ist, in der Formel der vorigen Aufgabe statt $w$ zu setzen $w - {}^1/_8 s$, so daß man erhält

*) In diesem Abschnitt sind die älteren Beobachtungen der Tab. 19 beibehalten worden, weil sich aus diesen eine Folgerung ergiebt (siehe Aufg. 9), welche eine in der Praxis bewährte genäherte Berechnung der Verbrennungswärme vegetabilischer Brennstoffe aus ihrer Zusammensetzung gestattet.

$a = 3\,(w - {}^1/_8\,s) + k$; den nicht im Wasser der Verbindung vorkommenden Theil des Sauerstoffs hat man nicht zu berücksichtigen.

8. Da die Hälfte des im Alkohol vorhandenen Sauerstoffs als bereits mit Wasserstoff verbunden zu betrachten ist, so hat man nach der Formel der vorigen Auflösung den gesuchten Wärmeeffect, auf den eines gleichen Gewichtes Kohlenstoff als Einheit bezogen, $= 3\,(0{\cdot}129 - {}^1/_8 \,.\, {}^1/_2 \,.\, 0{\cdot}3444) + 0{\cdot}5266 = 0{\cdot}85$, oder, da ein Gewichtstheil Kohlenstoff 7800 Calorien erzeugt, $= 0{\cdot}85 \,.\, 7800 = 6630$ Calorien, was von der durch Versuche gefundenen Zahl 6700 (Tabelle 19) nur wenig abweicht.

9. Da 1 Gewichtstheil Kohlenstoff zu seiner Verbrennung $2^2/_3$ Gewichtstheile Sauerstoff und 1 Gewichtstheil Wasserstoff zu seiner Verbrennung 8 Gewichtstheile Sauerstoff verbrauchen, und da ferner 1 Gewichtstheil Kohlenstoff bei seiner Verbrennung 78 Gewichtstheile Wasser und 1 Gewichtstheil Wasserstoff bei seiner Verbrennung 236 Gewichtstheile Wasser vom Gefrierpunkt bis zum Siedepunkte erhitzen, so folgt, daß 1 Gewichtstheil Sauerstoff bei seiner Verbrennung mit Kohlenstoff $\frac{78}{2^2/_3} = 29{\cdot}25$, 1 Gewichtstheil Sauerstoff bei seiner Verbrennung mit Wasserstoff ${}^{236}/_8 = 29{\cdot}5$ Gewichtstheile Wasser von $0^0$ bis $100^0$ C. erhitzen; der Wärmeeffect des Sauerstoffs beträgt also in runder Zahl 3000 Calorien.

Bei Berechnungen wird gewöhnlich diese runde Zahl 3000 genommen, nicht bloß der Erleichterung wegen, sondern auch weil es sehr wahrscheinlich ist, daß bei den betreffenden Versuchen ein etwas zu geringer Wärmeeffect gefunden wurde. Bezeichnet man die von einem Gewichtstheile eines Brennmaterials erforderliche Sauerstoffmenge mit $s$, so läßt sich der Wärmeeffect dieses Brennmaterials in Calorien ausdrücken durch $a = 3000 \,.\, s$.

10. Das Verfahren ist darauf gegründet, daß für jeden Gewichtstheil Sauerstoff, welchen Kohlenstoff und Wasserstoff bei ihrer Verbrennung aufnehmen, 3000 Calorien entwickelt werden (siehe vorige Aufgabe). — Da nun im Bleioxyd 12·94 Gewichtstheile Blei mit 1 Gewichtstheil Sauerstoff verbunden sind, so waren mit den nach der Aufgabe erhaltenen $n$ Gramm reguliniſchem Blei $\frac{n}{12{\cdot}94}$ g Sauerstoff verbunden, welche zur Verbrennung von 1 g Steinkohle verwendet worden sind, folglich ist der gesuchte Wärmeeffect

$$= 3000 \cdot \frac{n}{12{\cdot}94} = 231{\cdot}8 \,.\, n \text{ Calorien.}$$

11. Durch die Verbrennung von 1 Gewichtstheil Kohlenstoff werden $3^2/_3$ Gewichtstheile Kohlensäure gebildet und diese Kohlensäure muß alle beim Verbrennungsproceſſe entwickelte Wärme in sich aufnehmen. Nun ist der Wärmeeffect des Kohlenstoffes, wenn man ihn nach Auflösung zu 9 berechnet, $= 3000 \,.\, 2^2/_3 = 8000$ Calorien, d. h. 1 Gewichtstheil Kohlenstoff vermag durch die bei seiner Verbrennung entwickelte Wärme 8000 Gewichts-

theile Wasser von $0^0$ bis auf $1^0$ C. zu erwärmen, oder, was dasselbe ist, 1 Gewichtstheil Wasser von $0^0$ bis auf $8000^0$ C., also $3^2/_3$ Gewichtstheile Wasser von $0^0$ bis auf $\frac{8000}{3^2/_3} = 2182^0$ C., und diese Temperatur würde die in jedem Moment entwickelte Kohlensäure haben müssen, wenn ihre Wärmecapacität dieselbe wäre wie die des Wassers. Nun ist aber die specifische Wärme der Kohlensäure, auf die des Wassers bezogen, $= 0{\cdot}2164$, folglich die Verbrennungstemperatur des Kohlenstoffs im reinen Sauerstoff $\frac{2182}{0{\cdot}2164} = 10\,083^0$ C. Diese Bestimmungsweise läßt sich verallgemeinern. Bezeichnet nämlich $s$ diejenige Gewichtsmenge Sauerstoff, mit welcher sich 1 Gewichtstheil eines brennbaren Körpers bei seiner Verbrennung verbindet, und $\sigma$ die specifische Wärme des Verbrennungsproductes, so ist die Verbrennungstemperatur

$$T = 3000 \cdot \frac{s}{(1 + s)\,\sigma}.$$

12. Nach der Formel der vorigen Auflösung erhält man

$$T = 3000 \cdot \frac{8}{(1 + 8) \,.\, 0{\cdot}475} = 5614^0 \text{ C.}$$

13. In der atmosphärischen Luft sind mit je 1 Gewichtstheil Sauerstoff $\frac{76{\cdot}9}{23{\cdot}1} = 3{\cdot}33$ Gewichtstheile Stickstoff gemengt. Da nun 1 Gewichtstheil Kohlenstoff zu seiner Verbrennung $2^2/_3$ Gewichtstheile Sauerstoff verbraucht, so werden dadurch aus der atmosphärischen Luft $2^2/_3 \,.\, 3{\cdot}33 = 8{\cdot}88$ Gewichtstheile Stickstoff abgeschieden. Diese 8·88 Gewichtstheile Stickstoff von einer Temperatur vor der Erhitzung, die man ohne erheblichen Fehler $= 0^0$ annehmen kann, mischen sich nun mit den durch die Verbrennung entstandenen $3^2/_3$ Gewichtstheilen Kohlensäure von $10\,083^0$ C. (siehe Auflösung zu 11), und da die specifische Wärme des Stickstoffs $= 0{\cdot}2440$, die der Kohlensäure $= 0{\cdot}2164$ ist, so erhält man (nach Aufgabe 7 in XXI) die Temperatur der Mischung

$$= \frac{3^2/_3 \,.\, 10\,083 \,.\, 0{\cdot}2164 + 8{\cdot}88 \,.\, 0 \,.\, 0{\cdot}2440}{3^2/_3 \,.\, 0{\cdot}2164 + 8{\cdot}88 \,.\, 0{\cdot}2440} = 2703^0 \text{ C.},$$

welches die gesuchte Verbreunungstemperatur ist.

Verallgemeinert man wieder diese Bestimmungsweise mittelst der zu Ende der Aufgabe 11 gebrauchten Bezeichnungen, so erhält man nach den nöthigen Reductionen

$$T = 3000 \cdot \frac{s}{(1 + s)\,\sigma + 0{\cdot}917\,s}.$$

14. Nach der Formel der vorigen Auflösung erhält man

$$T = 3000 \cdot \frac{8}{(1 + 8) \,.\, 0{\cdot}475 + 0{\cdot}917 \,.\, 8} = 2067^0 \text{ C.}$$

15. Der Grund liegt darin, daß

1) die specifische Wärme des Wasserdampfes fast 4 mal so groß ist als die der Kohlensäure, d. h. daß die durch Verbrennung des Wasserstoffs erzeugte Wärme an einen Körper, den Wasserdampf, gebunden ist, welcher eine beinahe 4mal so große Wärmemenge nöthig hat (um auf dieselbe Temperatur erhitzt zu werden), als die Kohlensäure, an welche die durch Verbrennung des Kohlenstoffs entwickelte Wärme gebunden ist;

2) daß ein Gewichtstheil Wasserstoff bei der Verbrennung 9 Gewichtstheile Wasserdampf liefert, während 1 Gewichtstheil Kohlenstoff nur $3^2/_3$ Gewichtstheile Kohlensäure erzeugt.

---

## Auflösungen zu XXIV.

1. Damit Eis von $0^0$ in flüssiges Wasser von $0^0$ übergehe, bedarf es einer großen Menge Wärme (1 Kg 80 Calorien); der Annahme aber, daß diese Wärme durch den bei der Reibung stattfindenden Druck aus dem Eise herausgepreßt werden könnte, steht die Thatsache entgegen, daß das Eis eine geringere (nur halb so große) Wärmecapacität besitzt als das Wasser.

2. Im festen Zustande vibriren die Moleküle um gewisse Gleichgewichtslagen, aus denen sie zwar durch eine Wärmequelle etwas herausgedrängt werden können, ohne aber ihre gegenseitige Lage zu verändern und die Sphäre der gegenseitigen Anziehung zu verlassen. Im flüssigen Zustande sind zwar die Moleküle der gegenseitigen Anziehung nicht ganz entzogen, haben aber keine bestimmte Gleichgewichtslage mehr; sie können sich um ihren Schwerpunkt drehen und der Schwerpunkt selbst kann sich aus seiner Lage fortbewegen, insofern andere gleichwirkende Moleküle an die Stelle der verlassenen treten; es findet also in der Flüssigkeit eine vibrirende, wälzende und fortschreitende Bewegung statt, wobei sich nur an der Grenze der Flüssigkeit einzelne Moleküle der Anziehung durch die übrigen entziehen können, so daß auch ohne äußern Druck das Volum nahezu erhalten bleibt. Im gasförmigen Zustande sind die Moleküle aus der Sphäre ihrer gegenseitigen Anziehung herausgekommen, sie bewegen sich in gerader Linie mit constanter Geschwindigkeit, bis sie gegen andere Gasmoleküle oder eine für sie undurchdringliche Wand stoßen, dadurch den Druck auf diese letztere verursachen, wieder zurückfliegen u. s. w.; mit den fortschreitenden Bewegungen sind wahrscheinlich auch rotirende und vibrirende verbunden.

3. Nach dieser Theorie werden die vibrirenden Bewegungen der Atome durch den Einfluß der Wärmequelle allmälig schneller und größer, dadurch die Atome aus einander gedrängt und das Volum des Körpers vergrößert; ein Theil der lebendigen Kraft der schwingenden Atome wird also in die zur Vergrößerung des Volums erforderliche Arbeit umgesetzt und geht für die Einwirkung auf unsere Nerven und auf das Thermometer verloren. (Der Vorgang ist dem Heben eines schweren Körpers vergleichbar, dem die zu Gebote stehende, die Schwere überwindende Kraft zugleich eine pendelartige Bewegung zu ertheilen vermag.)

Hört die Einwirkung der Wärmequelle auf, so verringert sich die Energie der Schwingungen, die vorher zum Theil überwundene Anziehungskraft der Atome wird wieder wirksamer, die Atome fallen auf einander und dadurch wird derjenige Theil der lebendigen Kraft, der bei der Erwärmung in Hebungsarbeit verwandelt wurde, wieder ersetzt (ähnlich wie ein von einer Höhe fallender Körper eine lebendige Kraft erlangt, vermöge welcher ein Körper von gleichem Gewicht wieder auf die nämliche Höhe gehoben werden könnte).

4. Aus der bedeutenden Größe der Arbeit, die verrichtet werden muß, um die Molekularanziehung beim Uebergang in den flüssigen Zustand zum großen Theil, bei der Verdampfung ganz zu überwinden (siehe Aufgabe 13). Zu dieser innern Arbeit kommt bei der Verdampfung noch die äußere, die in der Ueberwindung des Atmosphärendrucks besteht.

5. Daß diese Atome gleiche specifische Wärme haben, daß also ein Wasserstoffatom dieselbe lebendige Kraft besitzt wie ein Sauerstoff- oder Stickstoffatom, folglich was dem Wasserstoffatom an Masse abgeht, durch größere Geschwindigkeit ersetzt wird.

6. Daraus, daß das Product aus dem Atomgewicht und der specifischen Wärme des Atoms für alle Elemente nahe das nämliche ist und man annehmen kann, alle diese Producte würden einander vollkommen gleich sein, wenn man die specifische Wärme für einen bestimmten Zustand der Atome rücksichtlich ihrer Temperatur und Aggregatform in Rechnung bringen könnte.

7. Um ein Cubikmeter atmosphärischer Luft von 0° C. Temperatur und bei einem constanten Drucke von 0·76 m Barometerhöhe um 1° C. zu erwärmen, sind, da das Gewicht dieses Luftquantums = 1·2932 Kg und die specifische Wärme der Luft bei constantem Druck = 0·2377 ist, 1·2932 . 0·2377 = 0·30739 Calorien nöthig. Dagegen sind zur Erhöhung der Temperatur desselben Quantums Luft um 1° C. bei constantem Volumen, da sich die Wärmemenge, welche die Luft bei constantem Volumen aufnimmt, zu derjenigen, welche sie bei constantem Drucke aufnimmt, wie 1 zu 1·421 verhält, nur $\frac{0{\cdot}30739}{1{\cdot}421}$ = 0·21632 Calorien erforderlich. Folglich werden 0·30739 — 0·21632 = 0·09107 Calorien bloß zur Ausdehnung verwendet, wenn ein Cubikmeter Luft von 0° C.

bei einem constanten Druck von 0·76 m auf 1° C. erwärmt wird; die übrige Wärme dagegen dient bloß zur Erhöhung der Temperatur.

Denken wir uns nun jenen Cubikmeter Luft in einer Säule von 1 Quadratmeter Grundfläche und mit fester Wandung so eingeschlossen, daß sie sich nach einer Richtung hin ausdehnen kann und dabei den Druck der Atmosphäre zu überwinden hat. Für jede Temperaturzunahme von 1° C. dehnt sich aber die Luft um 0·003665 ihres Volums bei 0° aus, also im vorliegenden Falle jener Cubikmeter um eine Länge von 0·003665 m, und überwindet dabei einen Atmosphärendruck von $1000 \cdot 0{\cdot}76 \cdot 13{\cdot}6 = 10\,336$ Kg (die mittlere Höhe der Quecksilbersäule im Barometer = 0·76 m, die Dichte des Quecksilbers = 13·6 gesetzt). Daraus folgt, daß mittelst der vorhin berechneten Wärmemenge von 0·09107 Calorien eine Last von 10 336 Kg um 0·003665 m, also durch eine Calorie eine Last von $\frac{10\,336 \cdot 0{\cdot}003665}{0{\cdot}09107} = 416$ Kg um 1 m gehoben werden kann (welche Berechnung zuerst Dr. Mayer gab). Im Mittel aus vielfachen genauen Versuchen hat Joule das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit (Calorie) = 425 Meterkilogramm gefunden.

8. $\frac{1275 \cdot 20}{425} = 60$ Calorien, also eine Wärmemenge, welche 60 Kg Wasser um 1° C. zu erwärmen vermag.

9. Da (nach Aufgabe 7) 425 mkg einer Calorie äquivalent sind, so ist 1 mkg äquivalent $\frac{1}{425} = 0{\cdot}00235$ Calorien, also $h$ Meterkilogramm $= 0{\cdot}00235 \cdot h$ Calorien.

10. Betrachtet man $v$ als die Endgeschwindigkeit des Körpers nach einem Falle von der Höhe $h$, so ist nach voriger Auflösung die erzeugte Wärme $= 0{\cdot}00235 \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{\cdot}00012 \cdot v^2$ Calorien.

11. Für jedes Kilogramm des Asteroids ist nach voriger Aufgabe die entwickelte Wärme $= 0{\cdot}00012 \cdot (6 \cdot 7500)^2 = 243\,000$ Calorien.

12. Ist $Q$ das Gewicht der Kugel in Kilogrammen, so entwickelt sie bei ihrem Falle $\frac{Qh}{425} = 0{\cdot}00235\ Qh$ Calorien, die sich auf die Masse der Kugel vertheilen. Ist $t$ die dadurch bewirkte Temperaturerhöhung derselben, so kann die erzeugte Wärmemenge auch ausgedrückt werden durch $Qtw$ Calorien, und aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man

$$t = \frac{0{\cdot}00235 \cdot h}{w} = \frac{0{\cdot}00235 \cdot 40}{0{\cdot}0324} = 2{\cdot}9^\circ \text{ C.}$$

Warum ist das Gewicht $Q$ der Kugel auf die Temperaturerhöhung ohne Einfluß?

13. a) Beim Verbrennen eines Kilogramms Wasserstoff werden 34 000 Calorien erzeugt (Tabelle 19), welche einer mechanischen Arbeit von 34 000 . 425 oder über 14 Millionen Meterkilogramm äquivalent sind.

b) Bei der Verdichtung von 9 Kg Wasserdampf im Wasser werden 9 . 540 = 4860 Calorien frei, deren Arbeitswerth = 4860 . 425 oder über 2 Millionen Meterkilogramm ist.

c) Beim Uebergang von 9 Kg Wasser von 0° in Eis werden nahe 9 . 80 = 720 Calorien frei, die einer Arbeit von 306 000 mkg entsprechen.

14. Während bei der Leitung der Wärme die Vibrationen wesentlich nur von einem materiellen Theilchen zu den benachbarten materiellen sich fortpflanzen, findet bei der Strahlung die Fortpflanzung der Schwingungen mittelst des Aethers statt. Jene Fortpflanzung entspricht der des Schalls, diese der des Lichts.

---

## Auflösungen zu XXV.

1. $tang\ ^1/_2 x = {}^{15}/_{18} = 0{\cdot}833\ldots$, also $^1/_2 x = 39°\,48'\,20''$ und folglich $x = 79°\,36'\,40''$.

2. $x = 2 . 51\,830 . tang\ 15'\,31{\cdot}5'' = 468$ Meilen.

3. a) $x = \dfrac{3}{tang\ 20''} =$ nahe 309·4 m.

b) Nicht in weiterer Entfernung, als den schwarzen Kreis in a), weil sonst die Dicke des Pfahls, also der Pfahl überhaupt nicht zu sehen wäre.

4. Aus $1 : (x\pi) = 1 : (180 . 60 . 60)$ folgt $x = \dfrac{180 . 60 . 60}{3{\cdot}1416} =$ etwas mehr als 206 000 m oder 27·6 Meilen.

5. $\alpha = \dfrac{0{\cdot}001 . 180 . 60}{3{\cdot}1416} =$ nahe 3·75 Minuten.

6. Der gesuchte geometrische Ort ist ein Kreisbogen, welchem die gegebene Strecke als Sehne und der Sehwinkel als Peripheriewinkel zugehört.

7. Unser Urtheil über die Größe eines Gegenstandes hängt ab von dem Sehwinkel, unter welchem der Körper erscheint, und von unserer Meinung über seine Entfernung. Diese wird aber wesentlich bestimmt einestheils durch das Vorhandensein uns bekannter Gegenstände zwischen unserm Auge und dem betrachteten Gegenstand, anderntheils durch die Beleuchtung oder die natürliche Helligkeit desselben. Wir schätzen eine Entfernung um so

richtiger, je mehr uns bekannte Gegenstände sich innerhalb derselben befinden, beim Mangel solcher Gegenstände schätzen wir die Entfernung in der Regel zu klein. Ferner erscheint uns ein Gegenstand bei guter Beleuchtung näher zu sein als bei schlechter. Bei einem hoch stehenden Himmelskörper fehlen die zur Vergleichung dienenden zwischenliegenden Gegenstände, auch wird sein Licht weniger durch die Atmosphäre geschwächt, als bei einem tiefer stehenden, der letztere scheint uns daher entfernter zu sein, als der erstere, folglich, da wir ihn unter dem nämlichen Sehwinkel erblicken, einen größern Durchmesser zu haben.

8. Auf einer weiten Ebene, besonders einer großen Wasserfläche, beurtheilt man die Entfernung eines Gegenstandes meist zu kurz (siehe Auflösung zur vorigen Aufgabe); daher fällt die Kugel gewöhnlich vor Erreichung des Ziels nieder.

9. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke (Fig. 36) $ABC$ und $abc$ (wegen $A = a$, $C = c$) folgt $0{\cdot}5 : 10{\cdot}4 = 2 : x$, also $x = 41{\cdot}6$ m.

10. $x = \dfrac{10}{tang\ 30^0} = 17{\cdot}32$ m.

11. Von jedem Punkt der Sonne fällt ein Lichtbündel, das man wegen der großen Entfernung der Sonne als ein prismatisches betrachten kann, auf die Oeffnung $O$ (Fig. 37), die wir zunächst als eine runde und sehr enge

Fig. 36.

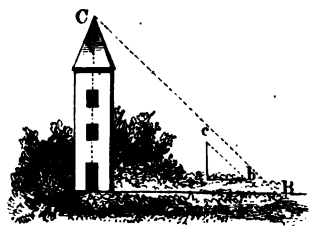
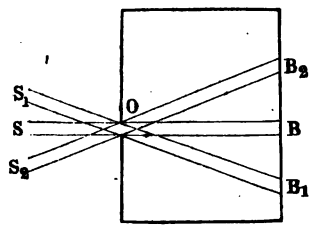


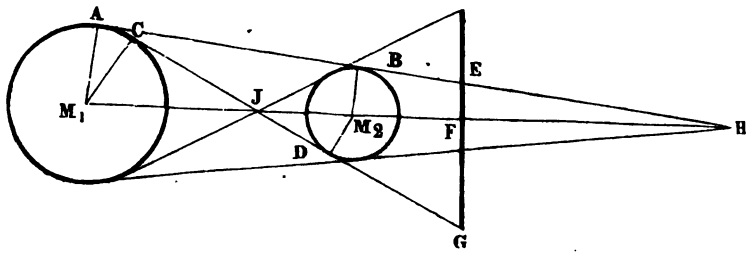

Fig. 37.




annehmen wollen, und durch diese auf den Schirm. Ist $S_1 B_1$ ein solches Lichtbündel vom obern Rand der Sonne, $S_2 B_2$ ein solches von ihrem untern Rand, so ist der Winkel $S_1 O S_2 = B_1 O B_2$ nahe gleich dem Sehwinkel von 32 Minuten, unter welchem der Durchmesser der Sonne erscheint. Hat die Oeffnung die Form eines Quadrats, so würde, wenn nur von einem Punkte der Sonne ein Lichtbündel auf die Oeffnung fiele, ein helles Quadrat auf dem Schirm erscheinen; denkt man sich aber ein solches Lichtbündel um den Rand der Sonne gedreht, so erhält man auf dem Schirm einen Kreis u. s. w. Bei größerer Oeffnung würde, wenn bloß von einem Punkte der Sonne ein Lichtbündel darauf fiele, ein Bild von der Größe der Oeffnung auf dem Schirm entstehen; die vom Sonnenrand kommenden Strahlen schließen aber mit den vom Mittelpunkt kommenden am Rande der Oeffnung einen Winkel von 16 Minuten ein, woraus sich eine Verbreiterung des Bildes ergiebt.

12. ad I. Aus Fig. 38 folgt wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke $M_1 A H$ und $M_2 B H \cdots \frac{M_1 M_2 + M_2 H}{M_1 A} = \frac{M_2 H}{M_2 B}$

Fig. 38.




und daraus $M_2 H = \frac{M_1 M_2 \,.\, M_2 B}{M_1 A - M_2 B} = \frac{40 \,.\, 4}{12 - 4} = 20$ cm.

ad II. Aus den ähnlichen Dreiecken $M_2 B H$ und $F E H$ folgt

$$F E = \frac{F H \,.\, M_2 B}{B H} = \frac{F H \,.\, M_2 B}{\sqrt{(M_2 H)^2 - (M_2 B)^2}} = \frac{(20 - 5) \,.\, 4}{\sqrt{20^2 - 4^2}}$$

$= 3{\cdot}06$ cm.

ad III. Aus den ähnlichen Dreiecken $M_1 C J$ und $M_2 D J$ folgt

$\frac{M_1 J}{M_1 C} = \frac{M_2 J}{M_2 D}$ und daraus $\frac{M_1 J + M_2 J}{M_1 C + M_2 D} = \frac{M_2 J}{M_2 D}$, also

$$M_2 J = \frac{(M_1 J + M_2 J) \,.\, M_2 D}{M_1 C + M_2 D} = \frac{M_1 M_2 \,.\, M_2 D}{M_1 C + M_2 D} = \frac{40 \,.\, 4}{12 + 4}$$

$= 10$ cm.

Ferner folgt nun aus den beiden ähnlichen Dreiecken $M_2 D J$ und $G F J$:

$$F G = \frac{M_2 D \,.\, F J}{D J} = \frac{M_2 D \,.\, (M_2 J + M_2 F)}{\sqrt{(M_2 J)^2 - (M_2 D)^2}} = \frac{4 \,.\, (10 + 5)}{\sqrt{10^2 - 4^2}}$$

$= 6{\cdot}547$ cm.

13. Aus der vorigen Auflösung folgt, wenn man die entsprechenden Werthe der vorliegenden Aufgabe setzt,

ad I. $x = \frac{23\,984 \,.\, 1}{112 - 1} = 216$ Erdhalbmesser.

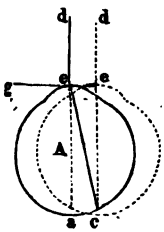
ad II. $x = \frac{(216 - 60) \,.\, 1}{\sqrt{216^2 - 1}} = 0{\cdot}72$ Erdhalbmesser.

ad III. $x = \frac{1 \cdot \left(\frac{23\,984}{112 + 1} + 60\right)}{\sqrt{\left(\frac{23\,984}{12 + 1}\right)^2 - 1^2}} = 1{\cdot}28$ Erdhalbmesser.

14. $x = {}^{590000}/_{14} = 42\,100$ Meilen.

15. Bezeichnet $x$ die gesuchte Geschwindigkeit, in Meilen ausgedrückt, sowie $\tau$ den sehr kleinen Zeittheil, welchen das Licht nöthig hat, um von der Pupille des Auges zum Sehnerv zu gelangen, so ist $x \,.\, \tau$ der im Innern des Auges vom Licht durchlaufene und $4{\cdot}12 \,.\, \tau$ der vom Auge senkrecht auf die Richtung des Sternenlichts zurückgelegte Weg während der Zeit $\tau$. Ein auf der Pupille anlangender Lichtstrahl des Sternes wird nun freilich in gerader Richtung fortgehen, aber, da sich das Auge mit der Erde bewegt, nicht an derjenigen Stelle der Netzhaut anlangen, zu welcher er gekommen sein würde, wenn das Auge still gestanden hätte, sondern an einer Stelle der Netzhaut, die nach derjenigen Seite hin liegt, von welcher sich die Erde herbewegt. Dies macht aber auf den Beobachter denselben Eindruck, als ob der Lichtstrahl schief eingetreten wäre. Ein Strahl $d\,a$ also (Fig. 39), der bei ruhendem Auge $A$ auf den Punkt $a$ treffen würde, trifft wegen der Bewegung des Auges nach der Richtung $e\,g$ den Punkt $c$ und daher scheint es dem Beobachter, der Strahl habe die schiefe Richtung $e\,c$.

Fig. 39.




Zur Bestimmung von $x$ hat man nun $tang\ a\,e\,c = \frac{a\,c}{a\,e}$, d. h. $tang\ 20{\cdot}25'' = \frac{4{\cdot}12 \,.\, \tau}{x \,.\, t}$, also $x = \frac{4{\cdot}12}{tang\ 20{\cdot}25''} = 41\,961$ Meilen, welches Resultat nahe genug mit dem der vorigen Aufgabe übereinstimmt.

16. Aus der dauernden Unsichtbarkeit des Bildes in $f$, während das Rad $12{\cdot}5$ Umdrehungen in der Secunde machte, muß man schließen, daß die vom Spiegel $s$ durch eine Zahnlücke nach dem Spiegel $p$ gehenden Strahlen erst dann wieder nach $f$ zurückkehrten, als statt der Zahnlücke der nächste Zahn vor den Punkt $f$ getreten und dadurch die Fortpflanzung des Lichtes nach dem Auge gehindert war. Um also die Strecke zwischen den beiden Fernröhren zweimal, nämlich $2 \,.\, 8633 = 17\,266$ m zu durchlaufen, bedurfte das Licht einer Zeit, die sich, weil das Rad 720 Zähne und ebensoviel Zahnlücken hatte und $12{\cdot}6$ Umdrehungen in der Secunde machte, $= \frac{1}{2 \,.\, 720 \,.\, 12{\cdot}6}$ Secunden ergiebt, woraus die Geschwindigkeit des Lichts (in der Secunde, die Meile $= 7500$ m gesetzt)

$$= \frac{17\,266}{7500} : \frac{1}{2 \,.\, 720 \,.\, 12{\cdot}6} = 41\,742 \text{ Meilen folgt.}$$

Die dauernde Sichtbarkeit des Bildes in $f$, wenn das Rad eine doppelt so große Umdrehungsgeschwindigkeit hatte wie im vorigen Fall, erklärt sich, was kaum der Bemerkung bedarf, nunmehr daraus, daß im Augenblick der Rückkehr des Lichts nach $f$ die nächste Zahnlücke an die Stelle des Zahns im vorigen Fall getreten und die Fortpflanzung des Lichts nach dem Auge ermöglicht war u. s. w.

# Auflösungen zu XXVI.

1. $L : 1 = FI : fi.$

2. Durch $3 \cdot 2 = 6.$

3. Die scheinbaren Helligkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen, die scheinbare Lichtstärke dagegen bleibt in allen Entfernungen dieselbe, wenn man in beiden Fällen von dem hemmenden Einflusse der Luft und überhaupt der zwischenliegenden Mittel absieht.

   Denn denken wie uns ein Auge zuerst in einer Entfernung $= 1$ von einem leuchtenden Punkte, sodann aber in die 2fache, 3fache u. s. w. Entfernung gebracht, so wird derselbe Lichtkegel, der in der Entfernung $= 1$ die Pupille zur Basis hatte, in den anderen Fällen eine 4mal, 9mal u. s. w. größere Basis haben; es wird also 4mal, 9mal u. s. w. weniger Licht in die Pupille gelangen und daraus ergiebt sich die erste der obigen Behauptungen.

   Während aber die von einem leuchtenden Körper ins Auge gelangende Lichtmenge im Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen abnimmt, nimmt auch die Größe seines Bildes in unserm Auge in demselben Verhältniß ab, also wird die Energie des Lichtes auf die getroffenen Stellen der Netzhaut, d. h. die scheinbare Lichtstärke dieselbe bleiben.

4. Ist $B$ die Beleuchtung einer Ebene, welche von der Lichtquelle mit der Lichtmenge $L_1$ um die Strecke $E_2$ entfernt ist und auf welche die Strahlen unter dem Winkel $\alpha_1$ auffallen, dagegen

   $b$ die Beleuchtung einer Ebene, welche bei derselben Lichtmenge und Entfernung der Lichtquelle gegen die Strahlen um den Winkel $\alpha_2$ geneigt ist,

   so bestehen zwischen den zusammengehörigen Größen

$$\begin{aligned} &B_1, L_1, E_1, \alpha_1, \\ &B_2, L_2, E_2, \alpha_2, \\ &B, L_1, E_2, \alpha_1, \\ &b, L_1, E_2, \alpha_2 \end{aligned}$$

   die Gleichungen: 1. $B_1 : B = \frac{1}{E_1^2} : \frac{1}{E_2^2},$

   2. $B : b = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2,$

   3. $b : B_2 = L_1 : L_2,$

   und daraus durch Multiplication:

$$\text{I.}\quad B_1 : B_2 = \frac{L_1 \sin \alpha_1}{E_1^2} : \frac{L_2 \sin \alpha_2}{E_2^2}.$$

Für $B_1 = B_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ folgt aus dieser Gleichung

$$\text{II.}\quad L_1 : L_2 = E_1^2 : E_2^2,$$

d. h. bei gleicher Beleuchtung einer Fläche und gleicher Neigung der auffallenden Strahlen verhalten sich die von den Lichtquellen ausgehenden Lichtmengen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Fläche.

5. Wie 25 : 49 oder fast wie 1 : 2.

6. Aus $x : 1 = 4^2 : 1$ folgt $x = 16$.

7. Da sich bei gleicher Beleuchtung die Lichtmengen der leuchtenden Körper verhalten wie die Quadrate ihrer Entfernungen, im gegenwärtigen Falle aber auch wie die Größe der Oberflächen, so ergiebt sich, wenn $E$ die Entfernung der Sonne, $D$ ihren Durchmesser, $d$ die Länge des Zolls in Meilen ausgedrückt bezeichnet,

$$x^2 : E^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi : \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi, \text{ also } x = E \cdot \frac{d}{D},$$

folglich $x = 20 \,.\, 10^6 \cdot \frac{0{\cdot}000004}{192\,000} = \frac{0{\cdot}08}{192}$ Meilen = nahe 10·4 Fuß.

8. Bezeichnet $x$ die Entfernung des Schirms von der Lampe, also $5 - x$ seine Entfernung vom Wachslicht, so folgt aus $\frac{x^2}{(5-x)^2} = \frac{6}{1}$, $x_1 = 2{\cdot}45$, $x_2 = 8{\cdot}45$ m, wovon der erstere Werth die Stellung des Schirms innerhalb der Verbindungslinie, der zweite die in der Verlängerung angiebt.

9. Wenn $B_1$, $B_2$ die Beleuchtungen der beiden Flächen bezeichnen, so hat man nach Aufgabe 4

$$B_1 : B_2 = \frac{\sin x}{3^2} : \frac{\sin 45^0}{10^2},$$

also, da $B_1 = B_2$ sein soll,

$$\frac{\sin x}{3^2} = \frac{\sin 45^0}{10^2},$$

folglich

$$x = \frac{9 \,.\, \sin 45^0}{100},$$

und daraus $x = 3^0\,38'\,55''$.

10. Nach Auflösung 4, II. hat man $L : l - 2{\cdot}5^2 : 0{\cdot}95^2 = 25 : 3{\cdot}61$ oder nahe $= 7 : 1$.

11. $l : L = 30^2 : 70^2 = 1 : 5{\cdot}44 \ldots$

12. $K : k = \frac{100}{42} : \frac{14{\cdot}4}{10} = 2{\cdot}38 : 1{\cdot}44 = 1{\cdot}653 : 1,$

$W : w = \frac{100}{42} : \frac{14{\cdot}4}{10\,.\,3} = 2{\cdot}38 : 0{\cdot}48 = 5 : 1$ nahezu.

13. $L_1 : L_2 : L_3 = 100 : 10{\cdot}9 : 13{\cdot}7.$

$$K_1 : K_2 : K_3 = \frac{100}{40} : \frac{10{\cdot}9}{10} : \frac{13{\cdot}7}{9}$$
$$= 100 : 43{\cdot}6 : 60{\cdot}6,$$

$$W_1 : W_2 : W_3 = \frac{100}{40} : \frac{10{\cdot}9}{10\,.\,1{\cdot}4} : \frac{13{\cdot}7}{9\,.\,4{\cdot}6}$$
$$= 100 : 31{\cdot}1 : 13{\cdot}2.$$

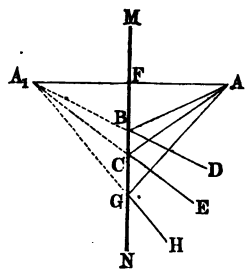
---

## Auflösungen zu XXVII.

---

1. Es sei (Fig. 40) $AF$ ein vom leuchtenden Punkte $A$ senkrecht auf den Spiegel fallender Lichtstrahl und $AB$, $AC$ seien zwei andere in schiefer Richtung auffallende, die nach $BD$, $CE$ reflectirt werden, so folgt aus einfachen geometrischen Lehren, daß $\angle ABF > \angle ACF$, also (da dem Grundgesetze der Reflexion gemäß $\angle DBN = \angle ABF$ und $\angle ECN = \angle ACF$) auch $\angle DBN > \angle ECN$ ist. Folglich müssen die beiden Linien $BD$ und $CE$ nach der Seite von $A_1$ zu einander schneiden. Ist nun $A_1$ ihr Durchschnittspunkt, so ist $\triangle A_1BC \cong \triangle ABC$ (weil $BC = BC$, $\angle A_1BC = \angle ABC$, $\angle A_1CB = \angle ACB$), folglich auch $A_1B = AB$.

Fig. 40.




Verbindet man nun $A_1$ mit $F$, so ist das dadurch entstandene $\triangle A_1FB \cong \triangle AFB$ (weil $FB = FB$, $A_1B = AB$ und $\angle A_1BF = \angle ABF$), folglich ist $\angle A_1FB = \angle AFB = R$, d. h. $A_1F$ und $AF$ bilden eine gerade Linie, sowie $A_1F = AF$. Der Satz ist also rücksichtlich der beiden Strahlen $AB$ und $AC$ bewiesen. Er ist aber auch für jeden andern von $A$ kommenden und z. B. in $G$ nach der Richtung $GH$ reflectirten Strahl richtig. Denn zieht man $A_1G$, so ist $\triangle A_1FG \cong AGF$ (weil $A_1F = AF$, $FG = FG$ und $\angle A_1FG = \angle AFG$), folglich $\angle A_1GF = \angle AGF$, also auch $= \angle HGN$, d. h. $A_1G$ liegt in der Verlängerung von $GH$ oder umgekehrt $GH$ ist die Verlängerung von $A_1G$.

2. Man fälle vom leuchtenden Punkte $A$ (Fig. 40) eine Senkrechte $AA_1$ auf den Spiegeldurchschnitt $MN$, mache $A_1C = AC$, verbinde das Auge $E$

mit $A_1$, so geben $AD$ und $DE$ den Weg des Lichtstrahles an, der bei dieser Lage des Auges vom Punkte $A$ in dasselbe gelangt. (Richtiger: sie geben die Lage der Axe des reflectirten Lichtkegels an, der $A$ zur Spitze und die Pupille des Auges zur Basis hat.)

3. Die Auflösung ergiebt sich aus Fig. 41.

Fig. 41.

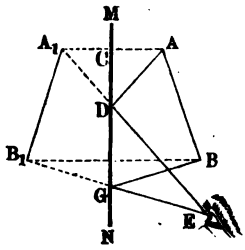
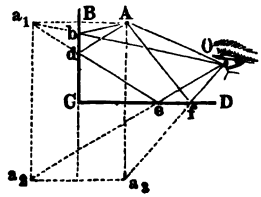



Fig. 42.




4. a) Es seien (Fig. 42) $BC$ und $CD$ zwei unter einem rechten Winkel gegen einander geneigte Spiegel, $A$ der leuchtende Punkt vor den Spiegeln, $O$ das Auge. Man construire

I. das Bild $a_1$ des Punktes $A$ vom Spiegel $BC$. Wäre nur der Spiegel $BC$ vorhanden, so würde nur der in $b$ auffallende Lichtkegel, dessen Axe $Ab$ ist, nach seiner Reflexion in der Richtung $bO$ ins Auge gelangen und dort den Eindruck machen, als käme der Lichtkegel vom Punkte $a_1$, alle übrigen von $A$ auf den Spiegel $BC$ auffallenden Strahlen würden aber nach ihrer Reflexion am Auge vorbeigehen. Wegen des Vorhandenseins des zweiten Spiegels $CD$ kann nun ein Theil der von $BC$ reflectirten Strahlen auf $CD$ fallen und nach abermaliger Reflexion zum Theil gleichfalls ins Auge gelangen. Um die Axe dieses zweiten ins Auge fallenden Lichtkegels zu finden, betrachte man den Punkt $a_1$, von welchem ja die auf $CD$ fallenden Strahlen zu kommen scheinen, als leuchtenden Punkt und bestimme

II. das Bild $a_2$ desselben vom Spiegel $CD$. Verbindet man dann $a_2$ mit $O$, ferner $e$ mit $a_1$ und $d$ mit $A$, so stellt $AdeO$ die Axe desjenigen Lichtkegels dar, der vom Punkte $A$ ausgehend nach seiner Reflexion in $d$ und $e$ ins Auge gelangt.

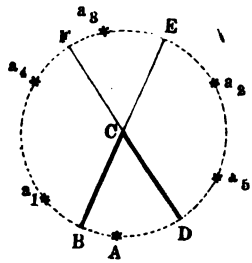
III. Construirt man noch das Bild $a_3$ des Punktes $A$ vom Spiegel $CD$, welches durch Reflexion des Lichtkegels, dessen Axe $AfO$ ist, entsteht und das zusammenfällt mit dem Bilde des Punktes $a_2$ in Beziehung auf den Spiegel $CB$, so hat man die drei Bilder, welche die beiden Spiegel geben können, wenn sie einen rechten Winkel bilden. Man überzeugt sich leicht, daß von den auf die Spiegel fallenden Strahlen keine anderen als die angegebenen ins Auge gelangen können.

Beschreibt man mit einem Halbmesser $= CA$ um $C$ einen Kreis, so liegen alle Bilder in der Peripherie dieses Kreises; denn denkt man sich

$CA$, $Ca_1$, $Ca_2$, $Ca_3$ gezogen, so erhält man die gleichschenkeligen Dreiecke $ACa_1$, $a_1Ca_2$, $a_2Ca_3$, $a_3CA$, deren Schenkel sämmtlich einander gleich sind. Daraus folgt eine einfachere Construction der Lage der Bilder, die wir auf den Fall anwenden wollen, wenn

b) der Winkel, welchen die beiden Spiegel $CB$ und $CD$ einschließen, $60^0$ beträgt (Fig. 43). Ist $A$ der leuchtende Punkt und man zieht aus $C$ mit dem Halbmesser $CA$ einen Kreis, so ist, wenn man Bogen $Ba_1 = BA$ macht, $a_1$ das Bild von $A$ in Beziehung auf den Spiegel $CB$, ferner, wenn Bogen $Da_2 = Da_1$, $a_2$ das Bild von $a_1$ in Beziehung auf den Spiegel $CD$, — wenn $Ba_3 = Ba_2$ oder $Ea_3 = Ea_2$, $a_3$ das Bild von $a_2$ bezüglich des Spiegels $CB$ u. s. w. Man erhält auf diese Weise fünf Bilder von $A$. (Die nämlichen fünf Bilder erhält man, wenn man umgekehrt wie vorhin erst das Bild von $A$ in Bezug auf den Spiegel $CD$ bestimmt, dann das Bild des gefundenen Punktes in Bezug auf den Spiegel $CB$ u. s. w.)

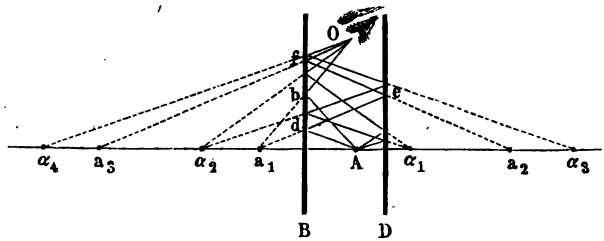
Fig. 43.




5. Es entstehen $n - 1$ Bilder, welche symmetrisch in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt im Scheitelpunkte des Winkelspiegels und dessen Radius der Entfernung dieses Scheitelpunktes vom leuchtenden Punkte gleich ist.

6. Es seien (Fig. 44) $B$ und $D$ die beiden parallelen Spiegel, $A$ ein leuchtender Punkt, $O$ das Auge. Man bestimme

Fig. 44.




I. das Bild $a_1$ des Punktes $A$ in Beziehung auf den Spiegel $B$, zieht $Oa_1$ und $bA$, so ist $AbO$ die Axe eines in das Auge gelangenden Lichtkegels, der von $a_1$ zu kommen scheint. Betrachtet man nun $a_1$ als leuchtenden Punkt und bestimmt sein Bild $a_2$ in Beziehung auf den Spiegel $D$, sowie ferner wieder das Bild $a_3$ des Punktes $a_2$ in Beziehung auf den Spiegel $B$, zieht die Linien $Oa_3$, $fa_2$, $ea_1$ und $dA$, so stellt die gebrochene Linie $Adef O$ die Axe eines zweiten ins Auge gelangenden Lichtkegels dar, der von $a_3$ zu kommen scheint. (Man könnte nun noch weiter das Bild von

$a_3$ in Beziehung auf den Spiegel $D$ und von diesem wieder das Bild in Beziehung auf den Spiegel $B$ bestimmen u. s. w.) Bestimmt man nun noch

II. das Bild $\alpha_1$ des Punktes $A$ in Beziehung auf den Spiegel $D$, von diesem das Bild $\alpha_2$ in Beziehung auf $B$, das Bild $a_3$ in Beziehung auf den Spiegel $D$ und von diesem das Bild $\alpha_4$ in Beziehung auf $B$ (welches Verfahren man gleichfalls noch fortsetzen könnte),

so sind $a_1$, $\alpha_2$, $a_3$, $\alpha_4$ . . . . die vom Auge $O$ im Spiegel $B$ gesehenen Bilder des Punktes $A$.

7. a. Um das Doppelte des vom Spiegel zurückgelegten Weges, also um 10 Zoll.

b. Er muß halb so hoch und breit sein, als der Mensch selbst; denn stellt (Fig. 45) $AB$ die Höhe des Menschen von dem Spiegel $MN$ dar, so erblickt das Auge $C$ desselben sein Bild $A_1 B_1$ innerhalb des Spiegelraums $DE$. Es ist aber

$$\frac{DE}{A_1 B_1} = \frac{CE}{CB_1} = \frac{BF}{BB_1} = {}^1/_2.$$

c. Sie erscheinen in lothrechter Stellung.

8. Winkel $\alpha = \beta$, aber auch $\alpha = \gamma = \delta$, folglich $AC \parallel BO$.

9. Winkel $O = 180^0 - OAB - OBA$
$= 180^0 - (180^0 - 2\alpha) - 2\beta$
$= 2(\alpha - \beta) = 2E$.

10. Ist (Fig. 46) $M_1 N_1$ der Durchschnitt eines auf der Bildfläche senkrecht stehenden, um die Axe $C$ drehbaren Spiegels, $A$ ein leuchtender Punkt vor

Fig. 45.

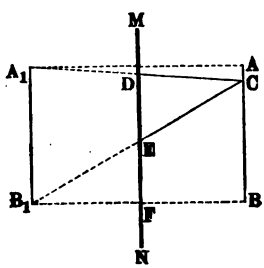
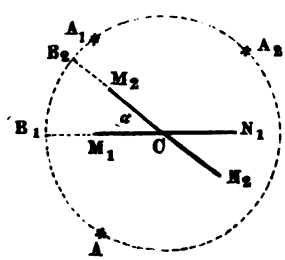



Fig. 46.




demselben, so liegt das Bild $A_1$ dieses Punktes so, daß Bogen $B_1 A_1$ = Bogen $B_1 A$. Während sich nun der Spiegel um den Winkel $\alpha$ dreht, also in die Lage $M_2 N_2$ kommt, gelangt das Bild des Punktes $A$ von $A_1$ nach $A_2$ und es ist zu beweisen, daß Bogen $A_1 A_2$ doppelt so groß ist, als Bogen $B_1 B_2$, der den Winkel $\alpha$ mißt.

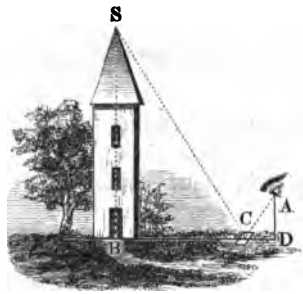
Bogen $A_1 A_2$ ist $= B_2 A_2 - B_2 A_1$;
da aber $B_2 A_2 = B_1 A = B_1 B_2 + B_1 A$
sowie $B_2 A_1 = B_1 A_1 - B_1 B_2$,
also auch $= B_1 A - B_1 B_2$

ist, so folgt durch Substitution

Bogen $A_1 A_2 = B_1 B_2 + B_1 A - (B_1 A - B_1 B_2) = 2 B_1 B_2$.

11. Man lege in einiger Entfernung von $BS$ (Fig. 47) einen Spiegel $C$ horizontal auf die Erde, nehme dann eine solche Stellung an, daß die Spitze $S$ in dem Spiegel und zwar nahe am Rande desselben erscheint, lasse ein Bleiloth $AD$ vom Auge herabhängen und messe die Länge desselben, sowie die Längen von $CD$ und $BC$, so bestimmt sich wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $SBC$ und $ACD$ die Höhe $SB = \frac{BC.AD}{CD}$.

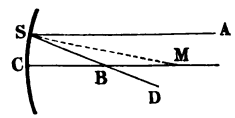
Fig. 47.




Statt des Spiegels kann man auch ein Gefäß mit Wasser nehmen, dessen Oberfläche immer horizontal ist.

12. a) Es sei (Fig. 48) $SC$ der Spiegel, $MC$ seine Hauptaxe, $M$ der Mittelpunkt seiner Krümmung und $AS$ der Lichtstrahl. Man ziehe den Halbmesser $MS$, so ist dieser das Einfallsloth und $ASM$ der Einfallswinkel. Macht man den Winkel $MSD = MSA$, so ist $SD$ die Richtung des reflectirten Strahles und man findet, daß sie durch den Halbirungspunkt $B$ des mit der Hauptaxe zusammenfallenden Spiegelhalbmessers $MC$ geht, vorausgesetzt, daß der auffallende Strahl der Hauptaxe nahe liegt. Denn aus $\angle ASM = \angle MSD$ (nach der Construction) und $\angle ASM = \angle SMC$ (als Wechselw. bei parallelen Linien) folgt $\angle MSD = \angle SMC$, also wenn man den Durchschnittspunkt von $SD$ und $MC$ mit $B$ bezeichnet, $MB = BS$. Enthält nun der Bogen $SC$ nur wenige Grade, so kann man $BS = BC$ setzen, also ist dann $MB = BC$, d. h. $B$ liegt in der Mitte des Krümmungshalbmessers $MC$. Diesen Punkt $B$, in welchem alle mit der Hauptaxe parallel auffallenden Strahlen nach ihrer Reflexion zusammentreffen, nennt man den Hauptbrennpunkt des Spiegels.

Fig. 48.




b) und c). Ist (Fig. 49 und 50) $AS$ der Strahl, so ziehe man eine

Fig. 49.

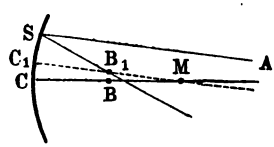
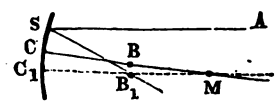



Fig. 50.



Parallele $M C_1$ mit $A S$ durch den Krümmungsmittelpunkt $M$ des Spiegels und dann von $S$ durch den Halbirungspunkt $B_1$ der Strecke $M C_1$ (Brennpunkt des Spiegels in Beziehung auf die Axe $M C_1$) die Linie $S B_1$, so ist diese die Richtung des reflectirten Strahles.

13. a) Die Strahlen sind der Hauptaxe parallel, gehen also (Aufgabe 12, a) nach ihrer Reflexion vom Spiegel alle durch den Hauptbrennpunkt $B$ (Fig. 51).

b) Man ziehe (Fig. 52) vom Punkte $A$ außer dem mit der Hauptaxe zusammenfallenden Strahle $A C$ noch einen beliebigen Strahl $A S$ und suche

Fig. 51.

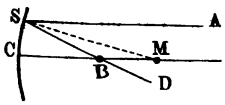
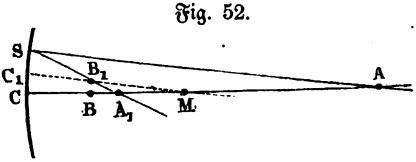



Fig. 52.

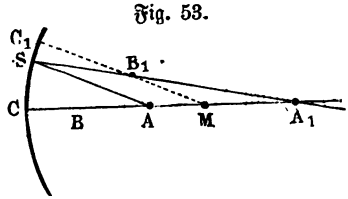



nach 12, b) die Richtung desselben nach seiner Reflexion, so ist der Durchschnittspunkt $A_1$ dieses Strahles mit der Hauptaxe der gesuchte Vereinigungspunkt:

c) Gleichfalls im Mittelpunkte der Spiegelkrümmung.

d) Aehnlich wie in b) (Fig. 53).

Fig. 53.




e) Die reflectirten Strahlen sind der Hauptaxe parallel (Fig. 51).

f) Aehnlich wie in b) (Fig. 54).

14. a) Man ziehe (Fig. 55) vom leuchtenden Punkte $A$ einen Strahl $A S$ parallel mit der Hauptaxe, so wird dieser (12, a) nach dem Hauptbrennpunkte $B$ reflectirt. Ferner ziehe man von $A$ einen zweiten

Fig. 54.

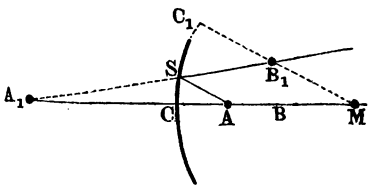
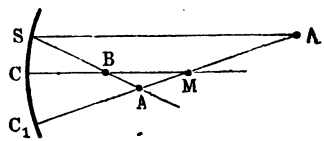



Fig. 55.




Strahl $A C_1$ durch den Krümmungsmittelpunkt $M$, so ist der Durchschnittspunkt $A_1$ der gesuchte Vereinigungspunkt.

b) (Fig. 56 a. f. S.) c) (Fig. 57 a. f. S.)

15. Man bestimme nach den vorhergehenden Aufgaben den Ort des Bildes, ziehe durch diesen vom Mittelpunkte der Pupille eine gerade Linie bis zum

Spiegel und dann von dem dadurch bestimmten Punkte des Spiegels eine gerade Linie nach dem leuchtenden Punkte.

Fig. 56.

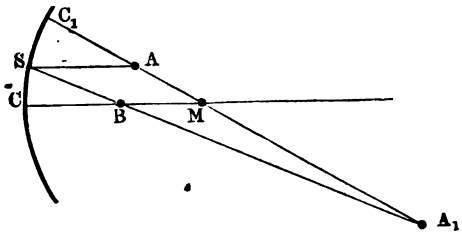
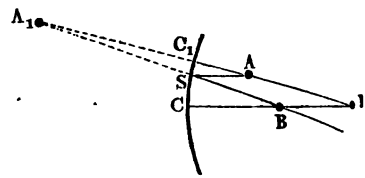
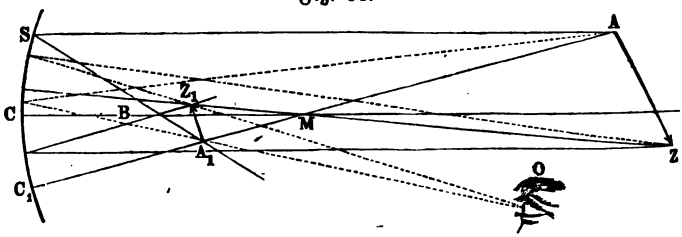



Fig. 57.




16. Die Auflösung ist aus Fig. 58 ersichtlich, worin $AZ$ die gegebene Linie, $A_1 Z_1$ ihr Bild darstellt.

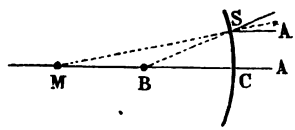
Fig. 58.




17. Sind (Fig. 50 auf Seite 128) $AS$ und $MC$ die beiden Strahlen, so ist $A_1$ der gesuchte Punkt.

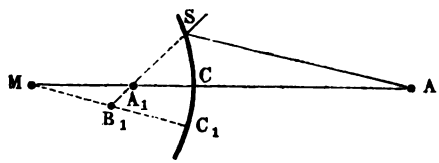
18. 1. a) Durch eine Construction, ähnlich der in 12, a) findet man, daß die Strahlen nach ihrer Reflexion von einem Punkte $B$ herzukommen scheinen, der in der Mitte des mit der Hauptaxe zusammenfallenden Halbmessers liegt (Fig. 59).

Fig. 59.



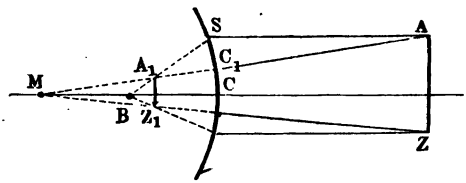

b) Das (imaginaire) Bild des Punktes $A$ liegt in $A_1$ (Fig. 60).

Fig. 60.



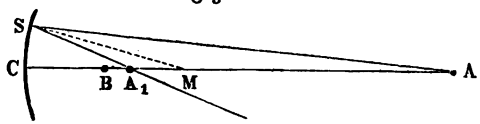
2) Man erhält das Bild $A_1 Z_1$ (Fig. 61) durch ähnliche Construction wie in Fig. 58.

Fig. 61.




**19.** In dem Dreieck $A S A_1$ (Fig. 62), dessen Winkel $S$ durch $SM$ halbirt

Fig. 62.




ist, hat man $A_1 S : SA = A_1 M : MA$, oder, da $A_1 S$ nahe $= A_1 C = \alpha$ und $AS$ nahe $= AC = a$ ist, $\alpha : a = (2p - \alpha) : (a - 2p)$*) und daraus

I. $\alpha = \dfrac{ap}{a - p}$ oder

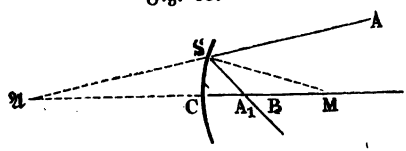
II. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{p}$.

**20.** 1) $\alpha = p$; 2) $\alpha < 2p$ und zwar $\alpha = {}^{10}/_{9}\, p$; 3) $\alpha = 2p$; 4) $\alpha > 2p$ und zwar $\alpha = 5p$; 5) $\alpha = \infty$; 6) $\alpha$ ist negativ, d. h. das (imaginaire) Bild liegt hinter dem Spiegel, oder: die Lichtstrahlen divergiren nach ihrer Reflexion und scheinen also von einem Punkte herzukommen, der hinter dem Spiegel liegt, und zwar ist $\alpha = -\,{}^{1}/_{9}\, p$.

**21.** Ein negativer Werth von $a$ bedeutet, daß die Lichtstrahlen convergirend auf den Spiegel fallen, also verlängert in einem Punkte hinter dem Spiegel zusammenlaufen, und giebt die Entfernung dieses Punktes vom Spiegel an.

Aus Fig. 63 ergiebt sich in ähnlicher Weise wie in Aufgabe 19: $A_1 S : AS = A_1 M : AM$ (Ebene Geometrie, §. 37, 3) oder $\alpha : a = (2p - \alpha) : (a + 2p)$, woraus $\alpha = \dfrac{ap}{a + p}$ oder $-\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{p}$ folgt, also

Fig. 63.




*) Aus dieser Proportion geht hervor, daß die Strecke $CM$ in den Punkten $A_1$ und $A$ harmonisch getheilt ist, also $C$, $M$, $A_1$ und $A$ harmonische Punkte sind.

Ausdrücke, die aus I. und II. der Aufgabe 19 sich ergeben, wenn man dort $-a$ statt $a$ setzt. Die gesuchten Werthe von $\alpha$ sind beziehungsweise

$$\frac{2pp}{2p+p} = {}^2/_3\, p;\quad \frac{p.p}{p+p} = \frac{p}{2};\quad \frac{0{\cdot}5\,pp}{0{\cdot}5\,p+p} = {}^1/_3\, p;$$

$$\frac{0{\cdot}1\,pp}{0{\cdot}1\,p+p} = {}^1/_{11}\, p.$$

22. Man braucht statt $b$ nur $-p$ zu setzen, so daß man statt jener Formeln erhält

$$\text{I.}\quad \alpha = -\frac{ap}{a+p},\ \text{oder II.}\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{p}.$$

23. 1) $\alpha = -p$; 2) $\alpha$ negativ und kleiner als $p$ und zwar $\alpha = -{}^{10}/_{11}\,p$; 3) $\alpha = -{}^1/_2\,p$; 4) $\alpha$ negativ und kleiner als ${}^1/_2\,p$ und zwar $= -{}^1/_{11}\,p$.

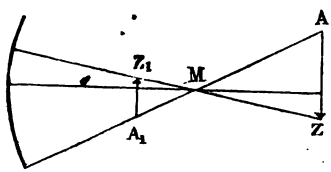
24. 1) $\alpha$ negativ und $> p$ und zwar $\alpha = -{}^{10}/_9\,p$; 2) $\alpha = -\infty$; 3) $\alpha$ positiv und zwar $= {}^1/_9\,p$.

25. a) 46 cm; b) 37·4 cm; c) 35·2 cm.

26. $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha} = \frac{50\,.\,2}{50+2} = 1{\cdot}923$ dcm.

27. a) Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $AMZ$ und $A_1MZ_1$ (Fig. 64) hat man, wenn die auf der Hauptaxe gemessenen Entfernungen des Gegenstandes $AZ$ und seines Bildes $A_1Z_1$ vom Punkte $M$ mit $D$ und $D_1$ bezeichnet werden, $\frac{A_1Z_1}{AZ} = \frac{D_1}{D} = \frac{2p-\alpha}{a-2p}$, und wenn man darin für $\alpha$ aus Aufgabe 19 seinen Werth $\frac{ap}{a-p}$ setzt, $\frac{A_1Z_1}{AZ} = \frac{p}{a-p}$ oder $A_1Z_1 = \frac{p}{a-p}\,AZ$.

Fig. 64.




b) Aus Fig. 61 findet sich in ähnlicher Weise $\frac{A_1Z_1}{AZ} = \frac{2p-\alpha}{a+2p}$ und wenn man für $\alpha$ aus Aufgabe 22 seinen Werth $\frac{ap}{a+p}$ (ohne Berücksichtigung des Vorzeichens) setzt, $A_1Z_1 = \frac{p}{a+p}\cdot AZ$.

28. a) Entfernung des Bildes vom Spiegel $= \frac{36\,.\,9}{36-9} = 12$ Zoll;

Größe desselben $= \frac{9}{36-9} = {}^1/_3$ der Größe des Gegenstandes.

b) Bild und Gegenstand fallen im Mittelpunkte des Spiegels zusammen.

c) Entfernung des Bildes vom Spiegel $= \frac{12-9}{12\,.\,9} = 36$ Zoll;

Größe desselben $= \frac{9}{12 - 9} = 3$mal so groß als der Gegenstand.

d) Entfernung $= \frac{9 \cdot 9}{9 - 9} = \infty$, d. h. es giebt kein Bild.

e) Entfernung $= \frac{4^1/_2 \cdot 9}{4^1/_2 - 9} = -9$ Zoll, d. h. das Bild liegt 9 Zoll hinter dem Spiegel;

Größe des Bildes $= \frac{9}{4^1/_2 - 9} = -2$, d. h. das hinter dem Spiegel liegende Bild ist 2mal so groß, als der Gegenstand.

29. a) Entfernung $= -\frac{36 \cdot 9}{36 + 9} = -7^1/_5$ Zoll, d. h. das Bild liegt $7^1/_5$ Zoll weit hinter dem Spiegel.

Größe des Bildes $= \frac{9}{36 + 9} = {}^1/_5$ der Größe des Gegenstandes.

b) Entfernung $= 6$ Zoll, Größe $= {}^1/_3$.

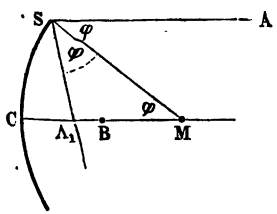
c) Entfernung $= 5^1/_7$ Zoll, Größe $= {}^3/_7$.

d) Entfernung $= 4^1/_2$ Zoll, Größe $= {}^1/_2$.

e) Entfernung $= 3$ Zoll, Größe $= {}^2/_3$. Das imaginaire Bild bleibt immer hinter dem Spiegel, nähert sich dem Spiegel, je mehr sich der Gegenstand diesem nähert, und nimmt dabei an Größe zu.

30. Betrachten wir den Randstrahl $AS$ (Fig. 65). Ist $A_1$ sein Durchschnittspunkt mit der Spiegelaxe, so folgt aus dem Dreieck $MSA_1$, wenn $MS = r$ ist, $\frac{MA_1}{r} = \frac{\sin \varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{1}{2 \cos \varphi}$, also $MA_1 = \frac{0{\cdot}5}{\cos \varphi} \cdot r$. Der Punkt $A_1$ kann daher nur dann genau mit dem Halbirungspunkte der Strecke $MC$, d. h. mit dem Brennpunkt $B$ zusammenfallen, wenn $\cos \varphi = 1$, also $\varphi = 0$ ist; da aber der Quotient $\frac{0{\cdot}5}{\cos \varphi}$ nur wenig von 0·5 verschieden ist, wenn $\varphi$ bis zu $4^0$ wächst, so darf in der Regel der Mittelpunktswinkel des Spiegels $8^0$ betragen.

Fig. 65.




31. Es seien (Fig. 66 a. f. S.) $S_1 C S_2$ der Hohlspiegel, $mn$ der ebene Spiegel und $A$ der leuchtende Punkt. Wäre der Spiegel $mn$ nicht vorhanden, so würde ein Bild des Punktes $A$ in $A_2$ entstehen, dessen Entfernung vom Hohlspiegel nach Aufgabe 19 sich bestimmt zu $\frac{8 \cdot 3}{8 - 3} = 4^4/_5$ dm. Nun werden aber die vom Hohlspiegel reflectirten Strahlen $S_1 m$ und $S_2 n$ vom Planspiegel $mn$ so zurückgeworfen, daß die Strahlen $mA_1$ und $nA_1$ mit $mn$ ein Dreieck $mnA_1$ bilden, welches dem Dreiecke $mnA_2$ congruent ist,

wonach sich darthun läßt, daß Dreieck $DnA_1 \cong$ Dreieck $DnA_2$, also $DA_1 = DA_2$ und $\angle A_1DA_2 = R$ ist. Das Bild $A_1$ des Punktes $A$ liegt also $4^4/_5 - 4 = {}^4/_5$ dm von der Mitte des Planspiegels in einer auf der Axe des Hohlspiegels senkrechten Richtung.

Fig. 66.

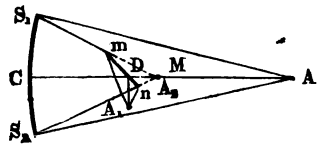
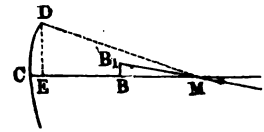



Fig. 67.




32. Es sei (Fig. 67) $CD$ der Hohlspiegel, $M$ sein Krümmungsmittelpunkt, $DE$ der Halbmesser seiner Oeffnung, sowie $BB_1$ der Halbmesser des Sonnenbildes, so ist

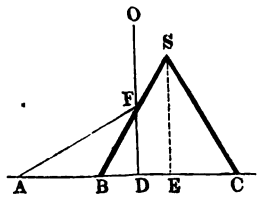
a) $BB_1 = BM \,.\, tang\, BMB_1 = 4 \,.\, tang\, 16' = 0{\cdot}01862$ dm.

b) Der Halbmesser $DE$ der Spiegelöffnung ist $= DM \,.\, sin\, DME = 8 \,.\, sin\, 10^0 = 1{\cdot}3892$ dm. Da nun alle den Hohlspiegel treffenden Sonnenstrahlen durch die Reflexion im Brennraume vereinigt werden, so verhält sich die natürliche Dichte der Strahlen am Spiegel zu der Dichte derselben im Brennraume umgekehrt, wie die Fläche der Spiegelöffnung zur Fläche des Sonnenbildes, oder umgekehrt, wie die Quadrate ihrer Halbmesser, also im vorliegenden Falle, wie $(0{\cdot}01862)^2 : (1{\cdot}3892)^2 = 1 : 5566{\cdot}4$. Man hat also

c) $40^0 : x = 1 : 5566{\cdot}4$, wo $x$ die gesuchte Temperatur bezeichnet, also $x = 222\,656^0$, vorausgesetzt, daß keine Wärme abgegeben würde.

33. Da (Fig. 68) $\angle BFD = \angle OFS = \angle BSE = {}^1/_3 R$, aber auch $\angle AFB = \angle OFS = {}^1/_3 R$, also $\angle AFD = {}^2/_3 R$, also, wie sich aus dem bei $D$ rechtwinkeligen Dreieck $AFD$ darthun läßt (Ebene Geometrie, §. 108, 1), $FA = 2FD$, folglich, da $\angle AFD$ durch $FB$ halbirt wird und also $\frac{BA}{BD} = \frac{FA}{FD}$ ist,

Fig. 68.




$$BA = \frac{2FD}{FD} \cdot BD = 2BD,$$

d. h. man findet den Punkt $A$, welcher dem Auge in $D$ zu liegen scheint, wenn man $BA = 2BD$ macht. (Zieht man von $E$ aus einen Kreis mit dem Halbmesser $EA$, so liegen in der Peripherie desselben alle Punkte, welche den in der Peripherie des Kreises vom Halbmesser $ED$ liegenden Punkten entsprechen.)

# Auflösungen zu XXVIII.

1. a) $x = \frac{\sin 30^0}{\sin 22^0} = \frac{0{\cdot}5}{0{\cdot}375} = 4/3.$

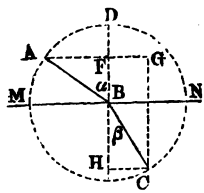
b) $x = \frac{\sin 24^0}{\sin 15^0\,45'} = \frac{0{\cdot}4067}{0{\cdot}2714} = 3/2.$

2. a) Aus $\frac{\sin 60^0}{\sin \beta} = 4/3$ folgt $\sin \beta = \frac{\sin 60^0}{4/3} = \frac{0{\cdot}866 \,.\, 3}{4} = 0{\cdot}649,$ also $\beta = 40^0\,30'.$

b) Aus $\frac{\sin 11^0 15'}{\sin \beta} = 3/4$ folgt $\sin \beta = 4/3 \sin 11^0 15' = 4/3 \,.\, 0{\cdot}194 = 0{\cdot}259,$ also $\beta = 15^0.$

3. Erste Construction. Es sei $MN$ (Fig. 69) die Durchschnittslinie der Einfallsebene mit der Trennungsfläche beider Medien, $AB$ der einfallende Strahl, und das Brechungsverhältniß sei $= 3/2$. Man errichte im Punkte $B$ auf $MN$ das Einfallsloth $BD$, ziehe mit einem beliebigen Halbmesser $BA$ einen Kreis um $B$, fälle von $A$ eine Senkrechte $AF$ zum Einfallsloth, theile $AF$ in drei gleiche Theile, trage zwei derselben auf die Verlängerung und ziehe dann die Parallele $GC$ mit dem Einfallsloth, so ist, wenn man die Linie $BC$ zieht, diese die Richtung des gebrochenen Strahles. Denn es ist alsdann

Fig. 69.




$$AB \,.\, \sin \alpha = AF$$
$$BC \,.\, \sin \beta = CH\ (= FG),$$

folglich, da $AB = BC$ ist,

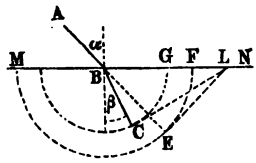
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{AF}{CH} = 3/2.$$

Wäre das Brechungsverhältniß $= 2/3$, so müßte man $AF$ in zwei gleiche Theile theilen, $FG$ gleich drei solcher Theile machen, außerdem aber ganz wie vorher verfahren.

Zweite Construction. Ist wieder $MN$ (Fig. 70 a. f. S.) die Durchschnittslinie der Einfallsebene mit der Trennungsfläche beider Medien, $AB$ der einfallende Strahl, und das Brechungsverhältniß $= 3/2$, so beschreibe man um $B$ mit einem beliebigen Halbmesser $BF$ einen Halbkreis, theile $BF$ in

drei gleiche Theile und beschreibe mit der Länge von zwei solchen Theilen, nämlich mit $BG$, gleichfalls einen Halbkreis. Alsdann verlängere man $AB$ bis $E$, ziehe in $E$ eine Tangente an den Halbkreis und von dem Punkte $L$ aus, in welchem diese Tangente die Linie $MN$ schneidet, eine Tangente an den mit $BG$ beschriebenen Halbkreis. Ist $LC$ diese Tangente, so ist $BC$ die gesuchte Richtung des gebrochenen Strahles. Denn es ist

Fig. 70.



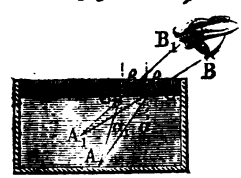

$$BL \,.\, \sin BLE = BE,$$
$$BL \,.\, \sin BLC = BC,$$

folglich, da $\angle BLE = \angle \alpha$ und $\angle BLC = \angle \beta$,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BE}{BC} = \frac{BF}{BG} = {}^3/_2.$$

4. Ein von dem Punkte $A$ (Fig. 71) im Wasser ausgehender Strahl gelangt nicht in gerader Linie nach dem in der Luft befindlichen Auge (falls sich dieses nicht gerade in der von $A$ auf die Oberfläche des Wassers senkrecht gezogenen Linie befindet), sondern hat vorher an der Grenze beider Mittel eine Brechung zu erleiden, die dem Brechungsverhältnisse ${}^3/_4$ entspricht. Es sei nun $CA\,C_1$ ein solcher von $A$ ausgehender Lichtkegel, der nach seiner Brechung bei $C\,C_1$ gerade in das bei $BB_1$ befindliche Auge gelangt, so ist klar, daß das Auge den Punkt $A$ in der Verlängerung der Linien $BC$ und $B_1C_1$, nämlich in $A_1$ erblicken wird. Daß aber der Punkt $A$ nicht bloß von seiner Stelle gerückt, sondern auch gehoben und dem Auge genähert erscheinen muß, läßt sich aus den Brechungsgesetzen in folgender Weise darthun. Die Einfallswinkel der Strahlen $A\,C \ldots A\,C_1$, nämlich $\alpha \ldots \alpha_1$, nehmen continuirlich ab, also auch die Brechungswinkel $\beta \ldots \beta_1$, und zwar die letzteren stärker; denn da die Winkel $\alpha \ldots \alpha_1$ kleiner sind als die Winkel $\beta \ldots \beta_1$, und da die Sinus kleiner Winkel schneller abnehmen als die größerer, also $\sin \alpha \ldots \sin \alpha_1$ schneller als $\sin \beta \ldots \sin \beta_1$, so müssen, damit die Gleichung $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \ldots = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = {}^3/_4$ bestehen kann, nothwendig die Brechungswinkel $\beta \ldots \beta_1$ selbst noch stärker abnehmen als die Einfallswinkel $\alpha \ldots \alpha_1$. Daraus folgt aber, daß $CB$ und $C_1B_1$ oder $A_1C$ und $A_1C_1$ mehr divergiren als $AC$ und $AC_1$, d. h. daß der Winkel $CA_1C_1 > CAC_1$, es liegt also, wie sich leicht daraus darthun läßt, $A_1$ näher an der Oberfläche des Wassers als $A$.

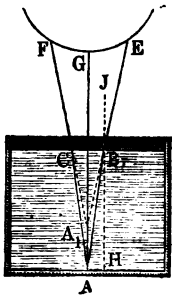
Fig. 71.




5. Denken wir uns, ein Auge $EF$ (Fig. 72) sehe nach dem Punkte $A$ eines Wasserbodens in einer Richtung $GA$, welche auf dem Wasserspiegel $BC$ senkrecht steht. $BAC$ sei der dünne, in der Figur viel vergrößert dar-

gestellte Strahlenkegel, welcher, von $A$ ausgehend, nach seiner Brechung ins Auge gelangt, und $A_1$ sei der Ort, in welchem sich der Punkt $A$ wegen seiner Hebung durch die Brechung zu befinden scheint.

Fig. 72.




Im Dreieck $A A_1 B$ ist $\frac{A A_1}{A_1 B} = \frac{\sin A_1 B A}{\sin A_1 A B}$ ... (I.)

Nach dem Brechungsgesetz und weil $\angle A_1 B H = E B J$, ist aber $\frac{\sin A_1 B H}{\sin A B H} = 4/3$ oder, da es sich hier nur um sehr kleine Winkel handelt, bei welchen die Sinus der Winkel den Winkeln selbst proportional sind,

$\frac{A_1 B H}{A B H} = 4/3$ oder $A_1 B H = 4/3 A B H$, also

$A_1 B A = A_1 B H - A B H = 1/3 A B H$ ... (II.)

Setzt man diesen Werth von $A_1 B A$ in die obige Gleichung (I.) und berücksichtigt, daß Winkel $A_1 A B = A B H$ ist, so erhält man $\frac{A A_1}{A_1 B} = \frac{\sin (1/3 A B H)}{\sin A B H}$ oder statt der Sinus die ihnen proportionalen sehr kleinen Winkel selbst setzend,

$\frac{A A_1}{A_1 B} = 1/3$, also $A A_1 = 1/3 A_1 B$, also auch nahezu $= 1/3 A_1 D$.

6. a) Weil nach dem Vorigen jeder im Wasser befindliche Punkt desselben von seiner Stelle gerückt und um $1/4$ seiner Tiefe unter dem Wasserspiegel gehoben erscheint.

b) Erklärt sich leicht durch Fig. 73 und Aufgabe 4.

7. Aus der in jedem Augenblicke veränderten Brechung der Lichtstrahlen von jenen Gegenständen, — verursacht durch die unaufhörliche Luftströmung, die rasch abwechselnd Luft von verschiedener Dichtigkeit zwischen jene Gegenstände und das Auge bringt.

Fig. 73.

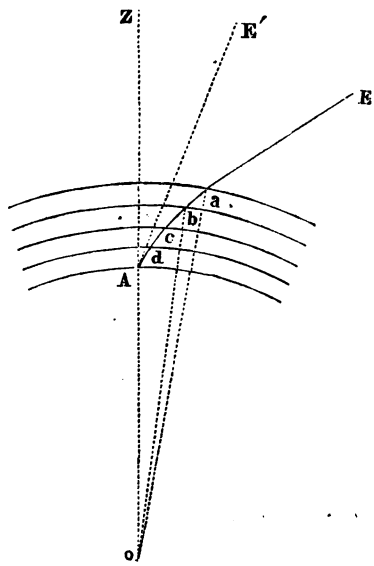
8. Zwei von einem fernen Lichtpunkte kommende Strahlen können möglicher Weise, weil durch Luftschichten von verschiedener Dichte gehend, mit einem Gangunterschied auf den nämlichen Punkt unserer Netzhaut gelangen, so daß die Oscillationen des einen Strahls die des anderen zum Theil oder ganz aufheben, also einen Wechsel in der Beleuchtung der Netzhaut verursachen. Dadurch läßt sich das Funkeln der Fixsterne, die uns nur als Lichtpunkte von noch nicht einer Secunde Durchmesser erscheinen, erklären. Daß uns die Planeten, die einen viel größern scheinbaren Durchmesser (z. B. Jupiter 40 Secunden) haben, in ruhigerm Licht erscheinen, erklärt sich daraus, daß sie als aus vielen Lichtpunkten bestehend zu betrachten sind, deren Strahlen in ihrer Wirkung auf unsere Netzhaut sich gegenseitig unterstützen können.

9. Da Erfahrung und Theorie lehren, daß ein durch verschiedene auf einander folgende Mittel gehender Lichtstrahl um so weniger durch theilweise Reflexionen geschwächt wird, je gleichartiger in optischer Hinsicht diese Mittel sind, d. h. je mehr ihre Brechungsverhältnisse übereinstimmen, so erklärt sich die Erscheinung schon aus der Annahme, daß Oel mit der Materie des Papiers optisch gleichartiger ist als Luft.

10. Weil 1) die in der Luft schwimmenden Staubtheilchen schon vor dem Regen aus der mit Wasserdampf gesättigten Luft diesen anziehen und, dadurch schwerer geworden, niedersinken können, durch den Regen aber gänzlich niedergeschlagen werden, und weil 2) Wasserdampf mit atmosphärischer Luft optisch gleichartig ist (siehe vorige Auflösung).

11. Unter astronomischer Strahlenbrechung versteht man die Brechung der von einem Gestirn $E$ (Fig. 74) kommenden Lichtstrahlen bei ihrem Durchgang durch die nach unten immer dichter werdende Atmosphäre der Erde, in deren Folge das Gestirn in größerer Höhe über dem Horizont, also geringerer Zenithdistanz $ZAE'$ erscheint, als es wirklich steht. Diese Strahlenbrechung ist in der Nähe des Zeniths $Z$ nur gering, nimmt mit der Zenithdistanz in immer stärkerm Verhältniß zu und beträgt in der Nähe des Horizonts, also bei einer Zenithdistanz von 90°, über einen halben Grad (siehe Tabelle 21, B).

Fig. 74.



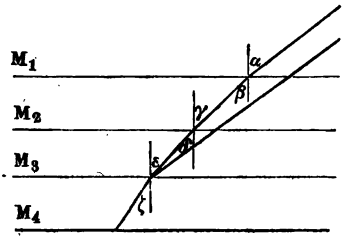

Ein ähnliches Heben durch die atmosphärische Strahlenbrechung wird auch zuweilen von Objecten beobachtet, die sich in der Erdatmosphäre befanden, in welchem Falle man von terrestrischer Strahlenbrechung spricht (Fata Morgana).

12. a) und b) erklären sich aus Aufgabe 11.

13. Bezeichnen $c_1, c_2, c_3, c_4$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts in den bezüglichen Mitteln $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ (Fig. 75) sowie $n_1$, $n_2$, $n_3$ die Brechungsverhältnisse, welche dem Uebergang eines Lichtstrahls bezüglich aus $M_1$ in $M_2$, aus $M_2$ in $M_3$, aus $M_3$ in $M_4$ entsprechen, so ist nach der Wellentheorie $n_1 = \frac{c_1}{c_2}$, $n_2 = \frac{c_2}{c_3}$, $n_3 = \frac{c_3}{c_4}$, folglich $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = \frac{c_1}{c_4}$. Bezeichnet aber $n$ den Brechungsexponenten bezüglich des Uebergangs eines Strahles aus

dem Mittel $M_1$ unmittelbar in das Mittel $M_4$, so ist $n = \frac{c_1}{c_4}$, folglich $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.

Fig. 75.




Wenn die Grenzflächen der vier Mittel einander parallel sind, so ist nach dem Brechungsgesetz und weil $\measuredangle\, \beta = \gamma$, $\measuredangle\, \delta = \varepsilon$

$$n_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},\ n_2 = \frac{\sin \beta}{\sin \delta},\ n_3 = \frac{\sin \delta}{\sin \zeta}$$

folglich $$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \zeta}.$$

Die Richtung des gebrochenen Strahls ist also im letzten Mittel $M_4$ die nämliche, als ob der Strahl aus dem ersten Mittel $M_1$ unmittelbar auf die Grenzfläche des letzten gefallen wäre.

14. Bezeichnet $n_1$ den (absoluten) Brechungsexponenten beim Uebergang eines Lichtstrahls aus dem leeren Raum in atmosphärische Luft, so ergiebt sich $\sin \varepsilon = n_1 \varepsilon_1$. Für 0° Temperatur und 760 mm Barometerstand ist $n_1 = 1{\cdot}000294$, bei 10° C. dagegen $= 1{\cdot}00028$ (siehe Tabelle 21, B, in welcher indessen nur die Refraction bis zu 85° scheinbarer Zenithdistanz nach dieser einfachen Gleichung berechnet ist).

15. Um diesen zu finden, braucht man nur in der Gleichung $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 4/3$, wo $\alpha$ den Einfallswinkel, $\beta$ den Brechungswinkel und $4/3$ das Brechungsverhältniß darstellt, $\alpha = 90^0$ zu setzen, wodurch sich findet:

$\sin \beta = \frac{\sin 90^0}{4/3} = 3/4 = 0{\cdot}75$, also $\beta$, d. h. der Grenzwinkel des gebrochenen Strahles beim Uebergange aus Luft in Wasser $= 48^0\,35'$.

16. Aus $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 3/2$ findet sich, wenn man wieder $\alpha = 90^0$ setzt,

$\sin \beta = \frac{\sin 90^0}{3/2} = 2/3 = 0{\cdot}666\ldots$, also der Grenzwinkel $\beta = 41^0\,48'$.

17. Für Strahlen, die aus Glas oder Wasser in Luft übergehen, sind die Brechungsverhältnisse bezüglich $2/3$ und $3/4$, es sind also die Brechungswinkel größer als die Einfallswinkel. Ein Strahl also, der aus Glas oder Wasser in Luft übergeht, muß unter einem Einfallswinkel auffallen, der

kleiner ist als $90^0$, wenn der Brechungswinkel höchstens $90^0$ betragen soll, und die Grenze des Einfallswinkels ergiebt sich

1) für Glas aus $\frac{\sin \alpha}{\sin 90^0} = {}^2/_3$, nämlich aus $\sin \alpha = {}^2/_3 = 0{\cdot}666\ldots$
folgt $\alpha = 41^0\,48'$;

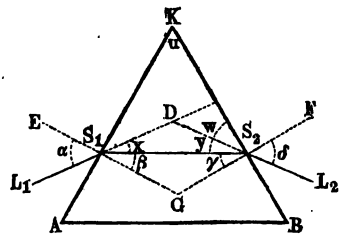
2) für Wasser aus $\frac{\sin \alpha}{\sin 90^0} = {}^3/_4$, woraus $\sin \alpha = {}^3/_4 = 0{\cdot}75$ oder
$\alpha = 48^0\,35'$ folgt.

Alle Strahlen also, die aus Glas unter einem größern Einfallswinkel als $41^0\,48'$ oder aus Wasser unter einem größern als $48^0\,35'$ auf die Begrenzungsfläche fallen, können nicht mehr in die Luft übergehen, sondern erleiden nur eine Reflexion und zwar eine totale, die einzige, die überhaupt vorkommt.

18. Der erste Theil der Erscheinung erklärt sich daraus, daß der Brechungswinkel eines aus Luft in Wasser übergehenden Lichtstrahles höchstens $48^0\,35'$ betragen kann, der zweite daraus, daß, wenn die Einfallswinkel der aus Wasser auf Luft treffenden Strahlen jene Grenze überschreiten, diese Strahlen nicht in die Luft übergehen können, sondern eine totale Reflexion stattfindet (siehe vorige Aufgabe). Um den Winkel zu finden, unter welchem das Auge den Durchmesser des fraglichen Kreises sieht, denke man sich in der Peripherie jenes Kreises eine Normale auf die Oberfläche des Wassers gezogen, so bildet diese mit einem der äußersten das Auge treffenden Strahlen den Grenzwinkel von $48^0\,35'$, und diesem muß der Winkel, den die erwähnten Strahlen mit der Normalen durch den Mittelpunkt des Kreises machen, gleich sein. Es erscheint also der Durchmesser jenes Kreises unter einem Winkel von $97^0\,10'$.

19. a) Ist (Fig. 76) $AKB$ der Durchschnitt eines Prismas, dessen brechender Winkel $u < 83^0\,36'$, $L_1 S_1$ der auffallende Lichtstrahl, so construire man (nach Aufgabe 5) den gebrochenen Strahl $S_1 S_2$ innerhalb des Prismas mit Berücksichtigung des Brechungsverhältnisses $= {}^3/_2$, und dann auf ähnliche Weise, jedoch beachtend, daß jetzt das Brechungsverhältniß $= {}^2/_3$ ist, die Richtung des ausfahrenden Strahles $S_2 L_2$. Dabei ist jedoch zu bemerken: 1) Wenn $u = 41^0\,48'$, so treten nur die innerhalb des $\angle\, A S_1 E$ im Punkte $S_1$ auffallenden Strahlen auf der andern Seite des Prismas aus. 2) Wenn $u > 41^0\,48'$, so kann nur noch ein Theil der im $\angle\, A S_1 E$ auffallenden Strahlen, und wenn $u < 41^0\,48'$, außer den im $\angle\, A S_1 E$ auffallenden, auch noch ein Theil der im $\angle\, K S_1 E$ liegenden auf der andern Seite des Prismas austreten.

Fig. 76.



b) Ist der brechende Winkel des Prismas $=$ oder $>$ $83^0\,36'$, so tritt kein einziger der auf der Seite $AK$ auffallenden Strahlen auf der Seite $BK$ aus, sondern jeder, der die Seite $BK$ trifft, wird dort reflectirt.

20. Ist (Fig. 76) $AKB$ der Durchschnitt des Prismas, $u = 60^0$, $L_1 S_1$ der auffallende Lichtstrahl und $\alpha = 50^0$, so ist $\sin \beta = {}^2/_3 \sin 50^0$, also $\beta = 30^0\,42'\,37''$, folglich ist (da $u = \beta + \gamma$, weil sowohl $u$ als $\beta + \gamma$ den $\angle$ $G$ zu $180^0$ ergänzen) $\gamma = 60^0 - 30^0\,42'\,37'' = 29^0\,17'\,23''$, also $\sin \delta = {}^3/_2 \sin \gamma = {}^3/_2 \sin 29^0\,17'\,23''$, folglich $\delta$, d h. der Winkel, welchen der austretende Strahl mit seinem Einfallsloth einschließt, $= 47^0\,12'\,33''$.

21. Wenn (Fig. 76) $L_1 S_1$ der auffallende, $S_1 S_2$ der im Prisma parallel der Basis $AB$ laufende Lichtstrahl, so ist $\angle$ $KS_1 S_2 = \angle$ $KS_2 S_1 = 60^0$, folglich $\beta = 30^0$, also $\sin \alpha = {}^3/_2 \sin \beta = {}^3/_2 \sin 30^0$, woraus $\alpha = 48^0\,35'\,25''$ folgt, und eben so groß ist auch $\angle$ $\delta$.

22. Er geht ungebrochen in das Glas, fällt unter einem Winkel von $45^0$ auf die Basis des Prismas, wird dort unter gleichem Winkel reflectirt (nach 17) und fährt unter einem Winkel von $90^0$ auf die zweite Seitenfläche und ungebrochen in die Luft.

23. Es ist (Fig. 76) $\sin \delta = n \,.\, \sin \gamma$, oder, da $\beta + \gamma = u$ (weil sowohl $\beta + \gamma$, als $u$ den Winkel $G$ zu $180^0$ ergänzen), also $\gamma = u - \beta$ ist, $\sin \delta = n \,.\, \sin (u - \beta) = n \,.\, \sin u \,.\, \cos \beta - n \,.\, \cos u \,.\, \sin \beta$, oder, da $n \sin \beta = \sin \alpha$, also $\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin \alpha^2}{n^2}}$ ist,

$$\sin \delta = n \,.\, \sin u \,.\, \sqrt{1 - \frac{\sin \alpha^2}{n^2}} - \cos u \sin \alpha.$$

24. Da (Fig. 76) $\angle$ $x = \alpha - \beta$, $\angle$ $y = \delta - \gamma$, so ist der gesuchte Winkel $w = \alpha - \beta + \delta - \gamma = \alpha + \delta - (\beta + \gamma) = \alpha + \delta - u$, also im vorliegenden Falle (siehe Auflösung zu 20):

Winkel $w = 50^0 + 47^0\,12'\,33'' - 60^0 = 37^0\,12'\,33''$.

25. In diesem Falle (Fig. 76) geht der Strahl parallel der Basis durch das Prisma und bildet mit dessen beiden Seiten gleiche Winkel, von denen also hier jeder $= 60^0$ ist. Daraus folgt $\angle$ $\beta = \gamma = 30^0$, also (aus $\sin \alpha = {}^3/_2 \sin \beta$) $\alpha = 48^0\,35'\,25''$. Nun ist $x = \alpha - \beta = 18^0\,35'\,25''$, folglich $w = 2x = 37^0\,10'\,50''$.

26. Es ist (Fig. 76)

$w = x + y$, oder, da $x = \alpha - \beta$, $y = \delta - \gamma$,
$w = (\alpha - \beta) + (\delta - \gamma) = (\alpha + \delta) - (\beta + \gamma)$.

Ferner ist $u = \beta + \gamma$, weil sowohl $u$ als $\beta + \gamma$ den Winkel $G$ zu $180^0$ ergänzen,

sowie $\alpha = \delta$ und $\beta = \gamma$, wenn $w$ den kleinsten Ablenkungswinkel bezeichnet,

folglich $w = 2\alpha - u$, also $\alpha = \frac{w + u}{2}$,

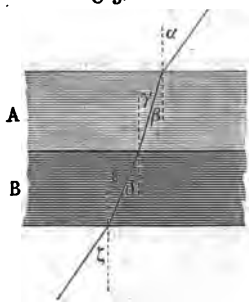
$u = 2\beta$, also $\beta = {}^1/_2\, u$.

Man erhält also

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{w + u}{2}}{\sin {}^1/_2\, u} = \frac{\sin \frac{24^0\,46' + 21^0\,12'}{2}}{\sin \frac{21^0\,12'}{2}} = 2{\cdot}123.$$

27. Wenn durch zwei an einander stoßende verschiedene Mittel $A$ und $B$ (Fig. 74), deren Trennungsfläche den beiden äußeren Grenzflächen parallel ist, ein Lichtstrahl in ein Mittel übergeht, das demjenigen gleich ist, aus welchem der Strahl in das Mittel $A$ ging, so ist nach Aufgabe 13 seine Richtung beim Ausfahren aus dem zweiten Mittel $B$ parallel der Richtung, in welcher er auf das erste Mittel $A$ fiel. Man hat also $\angle\, \zeta = \alpha$, aber auch $\angle\, \gamma = \beta$, $\angle\, \delta = \varepsilon$.

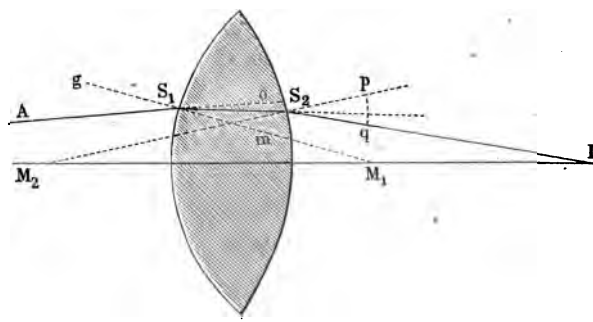
Fig. 74.




Aus $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_1$ und $\frac{\sin \zeta}{\sin \varepsilon} = n_2$ folgt daher $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_1$ und $\frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = n_2$, folglich durch Division der zweiten Gleichung durch die erste $\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{n_2}{n_1}$. Ist nun das Mittel $A$ Wasser, das Mittel $B$ Spiegelglas, so ist für einen Strahl, der aus $A$ in $B$ übergeht, das relative Brechungsverhältniß $n = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{n_2}{n_1}$, oder, da sich aus Tabelle 22 $n_2 = 1{\cdot}533$ und $n_1 = 1{\cdot}336$ findet, $n = 1{\cdot}147$.

28. Um den Weg des Lichtstrahls $A\,S_1$, Fig. 78, durch die Linse zu finden, müßte man streng genommen nach Aufgabe 5 verfahren, indem man die

Fig. 78.



Tangenten an den Kreisbögen in den Punkten $S_1$ und $S_2$ als die Durchschnitte der Trennungsflächen der Mittel betrachtet. Man kann sich aber, wenn der Einfallswinkel $A S_1 g$ nicht zu groß ist, auch folgenden annähernden Verfahrens bedienen. Man beschreibe, nachdem das Einfallsloth, d. h. der Krümmungshalbmesser $M_1 S_1$ gezogen ist, einen Kreisbogen $o m$ von beliebigem Radius zwischen den Schenkeln des Scheitelwinkels vom Einfallswinkel $A S_1 g$, theile diesen Kreisbogen in drei gleiche Theile und ziehe die Linie $S_1 S_2$ so, daß sie von $o$ aus $1/3$ des Bogens $o m$ abschneidet, so stellt $S_1 S_2$ den gebrochenen Strahl annäherungsweise, in dem Falle aber genau dar, wenn der Einfallswinkel $A S_1 g$ sehr klein ist, weil dann $\frac{\sin A S_1 g}{\sin S_2 S_1 m} = \frac{A S_1 g}{S_2 S_1 m} = 3/2$ ist. Auf ähnliche durch die Figur erläuterte Weise ergiebt sich auch die Richtung des aus der Linse fahrenden Strahles.

29. Der Vereinigungspunkt aller dieser Strahlen, d. h. der Hauptbrennpunkt der Linse liegt im Mittelpunkte $B$ der Linsenkrümmung (Fig. 79).

30. a) Der Strahl geht ungebrochen durch.

b) Der Strahl ist nach der Brechung seiner ursprünglichen Richtung parallel; bei einer sehr dünnen Linse, wie sie hier vorausgesetzt ist, und wenn der Winkel, den der Strahl mit der Hauptaxe bildet, sehr klein ist, kann man annehmen, daß er ungebrochen durchgeht.

c) Man verbinde (Fig. 79) die beiden Durchschnittspunkte der Linsenkrümmungen durch eine gerade Linie, d. h. ziehe die Mittellinie, verlängere den Strahl $A S$ bis zu dieser und ziehe von da eine Linie $B S$ nach dem Mittelpunkte $B$ der Krümmung, der zugleich der Hauptbrennpunkt der Linse ist.

Fig. 79.

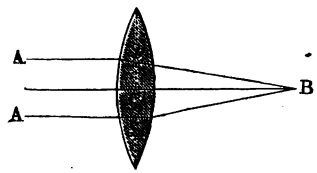
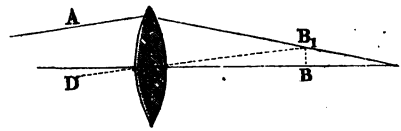



Fig. 80.




d) Ist $A S$ (Fig. 77) der bis zur Mittellinie verlängerte Strahl und $B$ der Hauptbrennpunkt der Linse, so ziehe man die Nebenaxe $D C$ parallel $A S$, errichte in $B$ eine Senkrechte auf die Hauptaxe bis zum Durchschnittspunkte $B_1$ mit der Parallelen, so ist $B_1$ der Vereinigungspunkt aller mit der Nebenaxe $D C$ parallel auffallenden Strahlen, vorausgesetzt, daß diese Nebenaxe nur einen kleinen Winkel mit der Hauptaxe einschließt und daß die ihr parallelen Strahlen nahe der Axe auffallen, welche Voraussetzung hier immer gemacht wird. Die Richtung des Strahles nach der Brechung ist also $S B_1$. (Näherungsweise kann man $C B_1 = C B$ machen.)

e) Dieselbe Construction, wie im vorhergehenden Falle (Fig. 81 a. f. S.).

31. a) Man ziehe (Fig. 82) vom leuchtenden Punkte $A$ außer dem mit der Hauptaxe $AC$ zusammenfallenden Hauptstrahle noch einen beliebigen Strahl $AS$

Fig. 81.

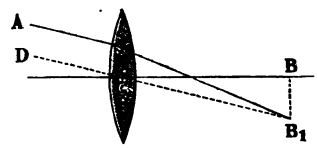
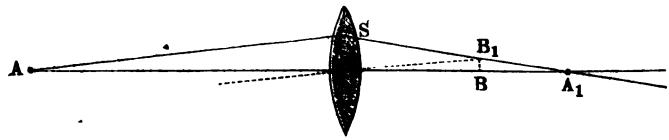


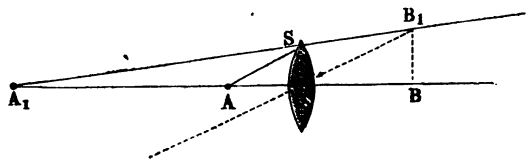

Fig. 82.




nach der Linse, verfahre rücksichtlich des letztern nach d) der vorigen Auflösung, so ist der Durchschnittspunkt $A_1$ des gebrochenen Strahles mit der Hauptaxe der Ort des Bildes, das also hier ein Sammelbild ist.

b) Man verfahre zuerst ähnlich, wie eben erwähnt. Da aber der vom leuchtenden Punkte $A$ (Fig. 83) ausgehende Strahl $AS$ im gegenwärtigen

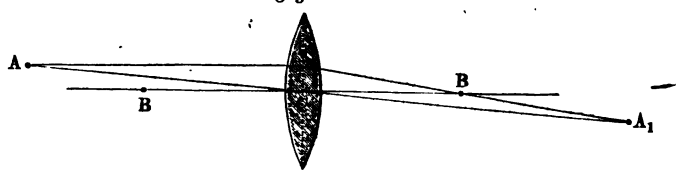
Fig. 83.




Falle nach seiner Brechung eine Richtung $SB_1$ hat, die mit der Hauptaxe divergirt, so muß man, um das geometrische Bild $A_1$ zu finden, die Linie $SB_1$ rückwärts verlängern.

32. a) Man ziehe (Fig. 84) vom leuchtenden Punkte $A$ aus den Strahl $AC$ durch den optischen Mittelpunkt, sowie den mit der Hauptaxe parallelen $AS$, der durch die Linse nach dem Hauptbrennpunkt $B$ gebrochen wird. Der

Fig. 84.




Durchschnittspunkt $A_1$ dieser beiden Strahlen ist der Ort des Bildes (Sammelbildes).

b) Man verfahre (Fig. 85) auf ähnliche Weise, nur verlängere man den durch den optischen Mittelpunkt gehenden Strahl, sowie den nach dem Haupt-

brennpunkte gebrochenen Strahl rückwärts, um das (geometrische) Bild $A_1$ des Punktes $A$ zu finden.

33. Die vorige Aufgabe ist nur auf die Endpunkte der Linie $AZ$ (Fig. 86 und 87) anzuwenden, um das Bild $A_1 Z_1$ derselben zu finden, das im ersten

Fig. 85.

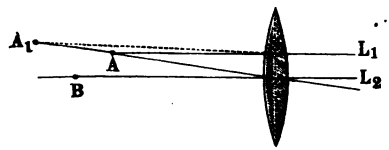



Fig. 86.

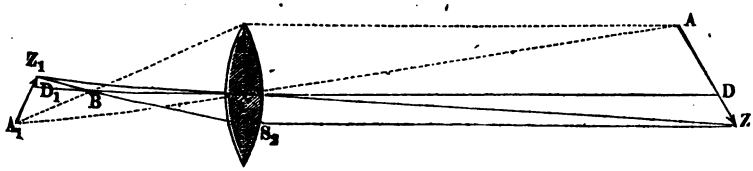
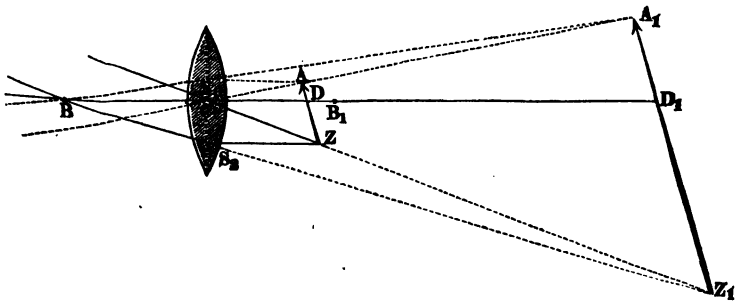



Fig. 87.

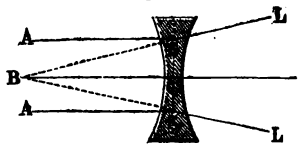



Falle ein Sammelbild hinter der Linse, im zweiten ein geometrisches vor derselben ist.

34. Der Zerstreuungspunkt liegt (Fig. 88) im Mittelpunkt $B$ der Linsenkrümmung auf derselben Seite der Linse, auf welcher der einfallende Strahl liegt.

35. Die Construction ist ähnlich der in Aufgabe 30, d und aus den Figuren 89 und 90 a. f. S. leicht erkennbar.

Fig. 88.



36. Die Auflösung ergiebt sich aus Fig. 91. Das geometrische Bild $A_1 Z_1$ liegt immer zwischen der Linse und dem leuchtenden Gegenstand $A Z$ und steht aufrecht.

Fig. 89.

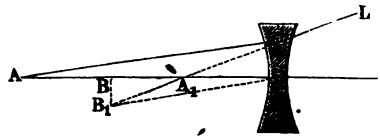



Fig. 90.

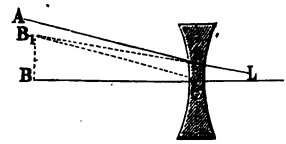
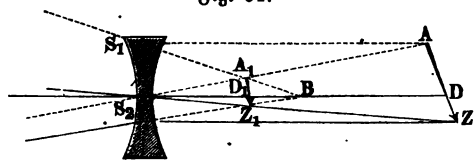
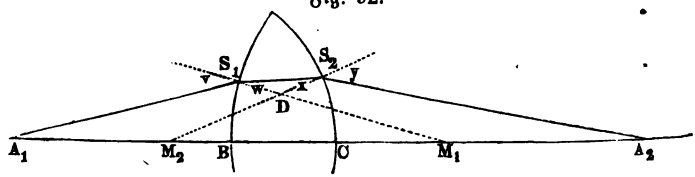



Fig. 91.




37. Aus den Dreiecken $A_1 S_1 M_1$ und $A_2 S_2 M_2$ (Fig. 92) folgt, wenn man die spitzen Winkel bei $A_1$, $M_1$, $A_2$, $M_2$ mit diesen Buchstaben bezeichnet,

Fig. 92.




$c = A_1 + M_1$, $y = A_2 + M_2$, folglich $v + y = A_1 + M_1 + A_2 + M_2$, oder, da man wegen der vorausgesetzten Kleinheit der betreffenden Winkel $v = n \,.\, w$ und $y = n \,.\, x$ setzen kann, $n\,(w + x) = A_1 + M_1 + A_2 + M_2$. Aus den beiden Dreiecken $S_1 D S_2$ und $M_1 D M_2$ folgt aber $w + x = M_1 + M_2$, folglich ist $n\,(M_1 + M_2) = A_1 + A_2 + (M_1 + M_2)$, also

$$(n - 1)\,(M_1 + M_2) = A_1 + A_2.$$

Da nun $M_1 = \frac{B S_1}{r} \cdot \varrho$, $M_2 = \frac{C S_2}{\mathfrak{r}} \cdot \varrho$, worin $\varrho = \frac{180}{\pi}$, und wenn wie gewöhnlich die Dicke des Glases vernachlässigt werden kann, $A_1 = \frac{C S_2}{a} \cdot \varrho$, $A_2 = \frac{B S_1}{\alpha} \cdot \varrho$

sowie $B S_1 = C S_2$ zu setzen ist,

so hat man $(n - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$.

38. Für Biconvergläser von ungleichen Radien folgt aus II. der Aufgabe: $p = \frac{r \,.\, \mathfrak{r}}{(n - 1)\,(r + \mathfrak{r})} = \frac{2 r \mathfrak{r}}{r + \mathfrak{r}}$.

Für Biconvexgläser von gleichen Radien folgt $p = \frac{r}{2(n-1)} = r$, d. h. der Brennpunkt eines solchen Glases ist um den Radius vom optischen Mittelpunkte entfernt. Für Planconvexgläser ist, da $r = \infty$, $p = \frac{r}{n-1} = 2r$, d. h. der Brennpunkt ist um den doppelten Radius vom Glase entfernt. Für Concavconvexgläser folgt aus II., da hier $r$ negativ und größer als $r$ ist, $p = \frac{rr}{(n-1)(r-r)} = \frac{2rr}{r-r}$.

39. 1) $\alpha = p$, d. h. die Bildweite ist gleich der Brennweite der Linse. 2) $\alpha > p$. 3) $\alpha = 2p$. 4) $\alpha = \infty$. 5) $\alpha$ muß in diesem Falle negativ sein, d. h. das (geometrische) Bild auf derselben Seite der Linse liegen, auf welcher der leuchtende Punkt liegt (die vom leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen sind nach ihrem Durchgange durch die Linse divergirend, aber weniger, als vorher) und der Absolutwerth von $\alpha$ ergiebt sich aus der Formel $\frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$, nämlich $\alpha = \frac{ap}{p-a}$. 6) Die Strahlen werden in diesem Falle noch mehr convergirend und der Absolutwerth von $\alpha$ berechnet sich aus der Formel $-\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$, nämlich $\alpha = \frac{ap}{a+p}$.

40. Aus Aufgabe 38 folgt $p = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{6+8} = 6^6/_7$ cm.

41. Aus Aufgabe 38 folgt $r = \frac{p(n-1)r}{r - p(n-1)} = 18$ cm.

42. Aus Aufgabe 38 folgt $p = 2 \cdot 24 = 48$ cm.

43. Aus Aufgabe 39 folgt $p = \frac{a \cdot \alpha}{a+\alpha} = \frac{450 \cdot 24}{450+24} = 22{\cdot}78$ cm.

44. Aus Aufgabe 39 folgt a) $\alpha = \frac{100 \cdot 60}{100-60} = 150$ cm; b) $\alpha = 100$ cm; c) $\alpha = 85{\cdot}7$ cm; d) $\alpha = 80{\cdot}4$ cm.

45. Es sei (Fig. 93 und 94 a. f. S.) $AZ = l$ die lineare Größe des Gegenstandes, $A_1Z_1 = \lambda$ die entsprechende seines Bildes, so hat man wegen der Aehnlichkeit der betreffenden Dreiecke $\frac{A_1Z_1}{AZ} = \frac{CD_1}{CD}$, d. h. $\frac{\lambda}{l} = \frac{\alpha}{a}$. Will man in dieser Gleichung, wie gewöhnlich, $\alpha$ durch $a$ und $p$ ausgedrückt haben, so erhält man:

1) wenn sowohl $a$ als $\alpha$ positiv, d. h. Gegenstand und (Sammel-) Bild auf verschiedenen Seiten der Linse liegen, also (nach Aufgabe 39) $\alpha = \frac{ap}{a-p}$ ist, wie in Fig. 93, $\frac{\lambda}{l} = \frac{p}{a-p}$;

2) wenn $a$ positiv und $\alpha$ negativ, d. h. Gegenstand und (geometrisches) Bild auf derselben Seite liegen, also $\alpha = \frac{ap}{p-a}$ ist, wie in Fig. 94, $\frac{\lambda}{l} = \frac{p}{p-a}$.

Fig. 93.

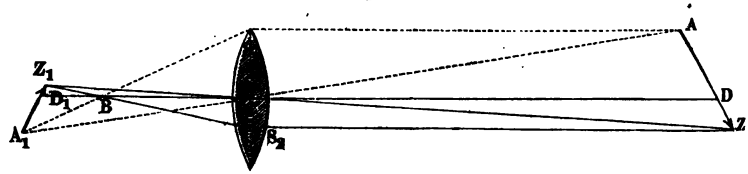
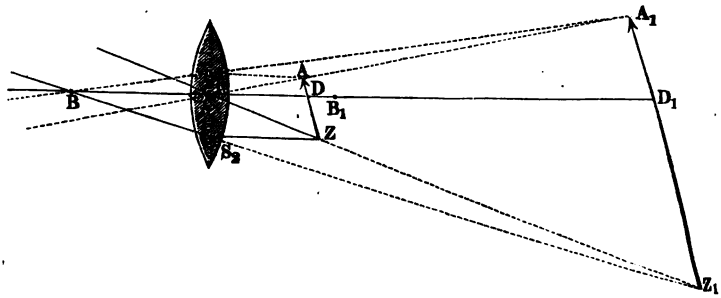



Fig. 94.




46. Das Bild ist $\frac{36}{144-36} = \frac{1}{3}$mal so groß, als der Gegenstand, also 3mal verkleinert (siehe Auflösung 1 zu Aufgabe 45).

47. Da die Bildweite $= \frac{40 \cdot 240}{240-40} = 48$ cm ist, so hat man aus

$$240 : 48 = 4 : x \ldots x = 0{\cdot}8 \text{ cm}.$$

48. Bezeichnet $l$ den Durchmesser der Sonne, $\lambda$ den des Sonnenbildes, $a$ die Entfernung der Sonne und $p$ die Brennweite der Linse, so ist nach Aufgabe 45: $\frac{\lambda}{l} = \frac{p}{a-p}$, also, da hier $p$ gegen $a$ verschwindend klein ist, $\lambda = \frac{l}{a}p$. Betrachtet man $l$ als Bogen eines Kreises vom Halbmesser $a$, so hat man $l : a\pi = \frac{32}{60} : 180$, woraus $\frac{l}{a} = \frac{32}{60} \cdot \frac{\pi}{180}$ folgt. Also ist $\lambda = \frac{32}{60} \cdot \frac{3{\cdot}1416}{180} \cdot 30$ cm $=$ nahe 2·8 mm.

49. Aus $\frac{30}{x-30} = 5$ folgt $x = 36$ cm.

50. Aus $\frac{30}{30 - x} = 5$ folgt $x = 24$ cm (siehe Auflösung 2 zu Aufgabe 45).

51. Aus $\frac{x}{x - 3} = 4$ folgt $x = 4$ dm.

52. $\frac{2}{2 - 1{\cdot}8} = 10$mal.

53. Man braucht nur die Krümmungsradien negativ zu setzen, so daß man erhält:

für Biconcavlinsen überhaupt

$$p = -\frac{r \cdot r}{(n-1)(r+r)} = -\frac{2rr}{r+r};$$

für Biconcavlinsen von gleichen Radien

$$p = -\frac{r}{2(n-1)} = -r;$$

für Planconcavlinsen

$$p = -\frac{r}{n-1} = -2r;$$

für Convexconcavlinsen

$$p = -\frac{rr}{(n-1)(r-r)} = -\frac{2rr}{r-r}.$$

Die Zerstreuungsweiten der Concavlinsen sind also den Brennweiten der Convexlinsen der Größe nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt.

54. Man braucht nur $p$ negativ zu setzen, so daß man hat $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{p}$, oder $\alpha = -\frac{ap}{a+p}$, worin jetzt $p$ eine absolute (positive) Zahl bezeichnet. Aus dieser Gleichung folgt:

1) Für $a = \infty$ wird $\alpha = -p$.

2) Ist $a$ positiv, so muß $\alpha$ negativ und $a > \alpha$ sein, d. h. divergirend auffallende Strahlen werden noch mehr divergirend. Ist dabei $a > p$, so ist der Absolutwerth von $\alpha < p$. Ist $a = p$, so ist der Absolutwerth von $\alpha = {}^1/_2\, p$. Ist $a < p$, so ist $\alpha$ noch kleiner als $a$.

3) Ist $a$ negativ, aber sein Absolutwerth

(1) $> p$, so ist $\alpha$ negativ oder die Strahlen werden divergirend und $\alpha > p$,

(2) $= p$, so ist $\alpha = \infty$,

(3) $< p$, so ist $\alpha$ positiv und größer als $a$, oder die Strahlen bleiben convergirend, ihre Convergenz ist jedoch nach der Brechung geringer als vor derselben.

55. Die Entfernung des Bildes von der Linse ist $= -\frac{30 \cdot 10}{30 + 10} =$ $-7{\cdot}5$ cm, d. h. das Bild des Gegenstandes liegt auf derselben Seite, auf welcher der Gegenstand sich befindet, $7{\cdot}5$ cm weit von der Linse entfernt. Die Größe des Bildes verhält sich zu der des Gegenstandes, wie $7{\cdot}5$ zu 30, oder das Bild ist 4mal so klein als der Gegenstand.

56. Um die Brennweite einer Convexlinse zu finden, kann man, nachdem man sie zur Wegschaffung der Randstrahlen mit einem papiernen Rand bedeckt hat, der nur die Mitte derselben frei läßt, so verfahren:

1) Man fängt das hinter der Linse entstehende Bild der Sonne auf einer weißen Papierfläche auf, mißt die Entfernung der letztern von der Linse und addirt dazu die Entfernung der Linsenoberfläche vom optischen Mittelpunkt, also bei einer convexen Linse von gleichen Krümmungshalbmessern die halbe Dicke.

2) Oder man stellt ein gutes Fernrohr auf einen sehr fernen Gegenstand, z. B. den Mond, so ein, daß man ihn deutlich und scharf sieht, alsdann legt man dieses Fernrohr horizontal, stellt die zu prüfende Linse in der Axe des Fernrohrs auf und hinter derselben ein Papier mit scharf geschriebener oder gedruckter Schrift, das man so lange hin- und herrückt, bis man die Schrift deutlich lesen kann. Die Entfernung der Schrift von der Linse, vermehrt um die Entfernung der Linsenoberfläche vom optischen Mittelpunkt, ist die gesuchte Brennweite; denn das Fernrohr kann bei der ihm gegebenen Stellung seiner Gläser gegen einander nur von solchen Gegenständen ein deutliches Bild geben, von welchen die Strahlen jedes einzelnen Punktes parallel auf das Objectiv fallen, also parallel aus der zu prüfenden Linse fahren, d. h. vom Brennpunkt derselben ausgehen.

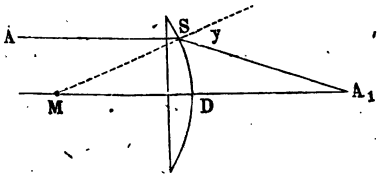
Zur Auffindung der Zerstreuungsweite einer Concavlinse bedeckt man den Rand derselben gleichfalls mit einem Papierstreifen, zeichnet auf einer weißen Papierfläche einen Kreis von doppeltem Durchmesser, wie derjenige des frei gelassenen Theils der Linse, und stellt dann die Linse und das Papier mit dem Kreis so auf, daß die auf die erstere fallenden Sonnenstrahlen auf dem letztern einen Lichtkreis bilden, der genau den gezeichneten Kreis deckt. Die Entfernung der Papierfläche von der Linse, vermehrt um die halbe Dicke der Linse, ist die gesuchte Zerstreuungsweite, was sich mittelst Fig. 88 auf Seite 145 leicht erklärt.

57. Der Strahl $AS$ (Fig. 95) geht ungebrochen in die Linse und wird an der krummen Fläche nach einem Punkte $A_1$ der Linsenaxe gebrochen. Wir wollen nun dessen Entfernung $DA_1$ von der Linse zu bestimmen suchen. Aus dem $\triangle MA_1S$ folgt $MA_1 = \frac{MS \sin y}{\sin A_1}$ oder, wenn $MS = MD = 1$ und $\measuredangle A_1 = y - M$ gesetzt wird, $MA_1 = \frac{\sin y}{\sin (y - M)}$, also

$$DA_1 = MA_1 - MD = \frac{\sin y}{\sin (y - M)} - 1.$$

Der Winkel $y$, folglich auch $y - M$, läßt sich, wenn $\measuredangle M (= \measuredangle A S M)$ und der Brechungsquotient $n$ gegeben sind, mittelst der Gleichung $\sin y = n \sin M$ berechnen, also auch $D A_1$ finden. Führt man diese Rechnung für $M = 1^0, 2^0, 3^0$ u. s. w. und $n = 1{\cdot}5$ aus, so findet man, daß mit wachsendem $M$ die Werthe von $D A_1$ fortwährend abnehmen und zwar für größere Winkel sehr bedeutend, daß sie aber für Winkel bis zu $5^0$ nahe zusammenfallen, nämlich sämmtlich nahe $= 2$, d. h. dem doppelten Krümmungshalbmesser gleich sind, so daß für eine Planconvexlinse der Mittelpunktswinkel $(2M)$ $10^0$ betragen darf, wenn parallel auffallende Strahlen im Brennpunkt vereinigt werden sollen.

Fig. 95.




58. Das erste Bild entsteht durch die Brechung, welche die Lichtstrahlen beim Durchgang durch die Linse erfahren, und ist ein reelles. Das zweite Bild entsteht durch Reflexion der Lichtstrahlen von der dem Auge zugewendeten Fläche der Linse, die hier wie ein convexer Spiegel wirkt, und ist ein bloß geometrisches (imaginaires). Das dritte Bild entsteht durch Reflexion der Lichtstrahlen, die in die Linse eingedrungen sind, aber von der abgewendeten Linsenfläche, die hier als Hohlspiegel wirkt, wieder reflectirt werden; es ist ein reelles Bild.

59. Aus $p = \frac{r}{n-1}$ (siehe Aufg. 38) folgt $n = \frac{r+p}{p} = \frac{16+31}{31} = 1{\cdot}516$.

60. Aus der Formel der Aufgabe erhält man $\frac{r}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{6}$ und aus dieser Gleichung in Verbindung mit der aus Aufg. 38, II. sich ergebenden $(1{\cdot}5 - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = \frac{1}{36}$ findet sich $r = 21$ und $\mathfrak{r} = 126$ cm.

---

## Auflösungen zu XXIX.

---

1. a) Als ein tiefer liegender, gefärbter Streifen, dessen Längenrichtung auf der Kantenrichtung des Prismas senkrecht steht und der oben roth, darunter orange, gelb, grün, blau, violett erscheint.

b) Als ein tiefer liegender, breiter gefärbter Streifen, der von oben nach unten zu roth, orange, gelb, grün, blau und violett erscheint. (Der Streifen erscheint aber auch gekrümmt, weil die von der Linse schief auf die vordere Prismenseite fallenden Strahlen, welche das Auge empfängt, so gebrochen werden, als gingen sie durch ein Prisma von größerm brechenden Winkel.

c) Am obern Ende roth und gelb, am untern blau und violett, in der Mitte aber weiß.

d) Sie erscheint oben violett und blau, unten roth und gelb gefärbt also umgekehrt, wie eine weiße Linie auf schwarzem Grunde. (Die Färbung rührt natürlich von dem Weiß her, worauf die schwarze Linie sich befindet.)

2. Die Antwort ist ähnlich, wie für c) und d) der vorigen Aufgabe.

3. Erklärt sich leicht durch Verfolgung des einfallenden Lichtstrahls $AB$ mittelst der Figur bei der Aufgabe. Die innerhalb des Prismas zerstreuten Farbenstrahlen treten bei $C$, $E$ und $G$ zerstreut, also gefärbt, dagegen bei $D$, $F$ und $B$ parallel, also ungefärbt aus dem Prisma.

4. Aus XXVIII., 38 und Tabelle 23 findet sich

ad a) für die Strahlen nach $B : p = \frac{r}{2\,(n-1)} = \frac{r}{2\,.\,0{\cdot}525832}$
$= 0{\cdot}9509\ r,$

„ „ „ „ $E : p = \frac{r}{2\,.\,0{\cdot}533005} = 0{\cdot}9381\ r$

„ „ „ „ $H : p = \frac{r}{2\,.\,0{\cdot}546566} = 0{\cdot}9148\ r;$

ad b) für die Strahlen nach $B : p = 0{\cdot}7965\ r,$
„ „ „ „ $E : p = 0{\cdot}7788\ r,$
„ „ „ „ $H : p = 0{\cdot}7451\ r.$

5. Unter complementären oder Ergänzungsfarben versteht man solche, die einander zu Weiß ergänzen. Grün ist die Ergänzungsfarbe von Roth, Blau von Orange, Violett von Gelb und umgekehrt.

6. Wenn ein Lichtstrahl auf ein Mittel trifft, so wird ein Theil des Lichtes an der Grenze entweder regelmäßig oder zerstreut (diffus) zurückgeworfen, ein anderer Theil geht in das Mittel über. Das in das Mittel eindringende Licht wird nun in den verschiedenen Schichten desselben, auf welche es trifft, zum Theil reflectirt, zum Theil absorbirt oder auch zum Theil durchgelassen. Von einem im durchfallenden Lichte gefärbt erscheinenden Körper muß man daher annehmen, daß die complementären Farbenstrahlen, d. h. diejenigen, welche die durchgelassenen zu Weiß ergänzen würden, theils von seiner Oberfläche reflectirt, theils in ihm absorbirt werden; — von einem im reflectirten Lichte farbig erscheinenden, daß die in eine wenn auch nur sehr dünne Oberflächenschicht des Körpers eingedrungenen Lichtstrahlen zum Theil absorbirt oder durchgelassen, zum Theil reflectirt werden, und zwar so, daß die absorbirten und durchgelassenen die Ergänzungsfarben der reflectirten sind.

7. a) Erklärt sich unmittelbar aus voriger Aufgabe.

b) Fällt das (weiße) Licht zuerst auf das rothe Glas, so absorbirt dieses die grünen Strahlen und läßt bloß die rothen durch; diese aber werden vom grünen Glase nicht durchgelassen. Der umgekehrte Fall findet statt, wenn das Licht zuerst auf das grüne Glas fällt.

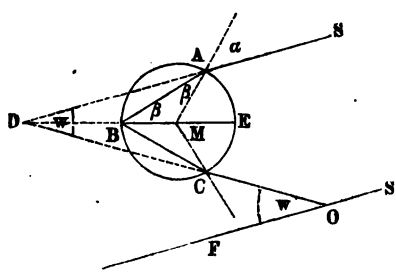
8. Die Luft reflectirt am meisten die blauen und violetten Strahlen des weißen Sonnenlichtes, so daß direct von der Sonne vorzugsweise die rothen und gelben, von den übrigen Punkten des Himmelsgewölbes aber die blauen Strahlen zu uns gelangen. Morgens und Abends hat aber das Sonnenlicht einen längern Weg in der Atmosphäre zurückzulegen, als bei höherm Stande der Sonne, weshalb Morgens und Abends die blauen Strahlen in größerm Maße durch Reflexion verloren gehen und vorherrschend die rothen und gelben Strahlen zu uns gelangen.

9. Die Empfindung des Blau wird durch schnellere Schwingungen der Netzhaut erzeugt, als die, wodurch die Empfindung des Roth entsteht. Blau verhält sich also zum Roth, wie ein höherer Ton zu einem niedern; aber wie die Saiten des Contrebasses, um vernommen zu werden, weiter schwingen müssen, wie die der Violine, so müssen auch die Schwingungen, welche Roth erzeugen sollen, energischer sein, als die, welche die Empfindung des Blau verursachen. Bei schwacher Beleuchtung werden daher die langsamen Schwingungen der rothen Farbe nicht mehr empfunden, während die rascher auf einander folgenden Schwingungen des blauen Lichts noch wahrgenommen werden.

10. Das Licht des Mondes ist blau, das der Kerze roth; denn der eine der beiden Schatten ist eine Stelle, welche vom Mond allein, der andere Schatten eine Stelle, welche nur vom Kerzenlicht beschienen wird.

11. Aus Fig. 96 ergiebt sich $\frac{1}{2}\ w = AME - DAM = 2\beta - \alpha$, also $w = 4\beta - 2\alpha$, sowie $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$, worin $n$ das Brechungsverhältniß eines aus Luft in Wasser übergehenden Lichtstrahls bezeichnet.

Fig. 96.

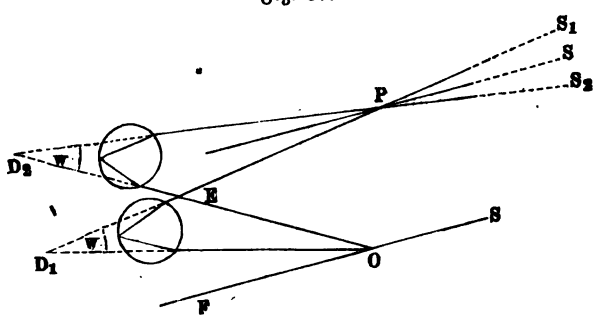


12.

| Einfallsw. $\alpha$ | Brechungsw. $\beta$. | Ablenkungsw. $w$. |
|---|---|---|
| $0^0$ | $0^0$ | $0^0$ |
| 10 | 7 30′ | 10 |
| 20 | 14 54 | 19 36′ |
| 30 | 22 5 | 28 20 |
| 40 | 28 54 | 35 36 |
| 50 | 35 10 | 40 40 |
| 58 | 39 37 | 42 28 |
| $59^0$ 23′ | 40 12 | 42 2 |
| 60 | 40 37 | 42 28 |
| 70 | 44 57 | 39 48 |
| 80 | 47 46 | 31 4 |
| 90 | 48 45 | 15 |

13. Da das Auge nur aus jenen Tropfen ein Bild des Punktes $S$ erhalten kann, auf welche Strahlen unter einem Einfallswinkel von $59^0\,23'$ fallen und unter einem Ablenkungswinkel von $42^0\,2'$ reflectirt werden, — da ferner wegen der vorausgesetzten großen Entfernung des Punktes $S$ alle diese Strahlen dem durch das Auge $O$ (Fig. 96) gehenden Strahl $SOF$ parallel betrachtet werden können, also bezüglich jedes Tropfens, der Licht ins Auge zu reflectiren vermag, $\measuredangle DOF = w = 42^0\,2'$ sein muß, so ergiebt sich, daß alle Bilder des Punktes $S$ in einem Kreise liegen müssen, durch dessen Mittelpunkt die Linie $SOF$ geht und dessen Halbmesser im Punkte $O$ unter einem Winkel von $42^0\,2'$ erscheint. Dabei ist jedoch auf die Farbenzerstreuung noch keine Rücksicht genommen.

Fig. 97.




14. Setzt man an die Stelle des leuchtenden Punktes $S$ die Sonne mit ihrem scheinbaren Durchmesser von beiläufig 32′, so muß, wieder von der Farbenzerstreuung abgesehen, statt der kreisförmigen Lichtlinie ein ringförmiger Streifen von 32′ Breite gesehen werden. Denn unter den unzähligen

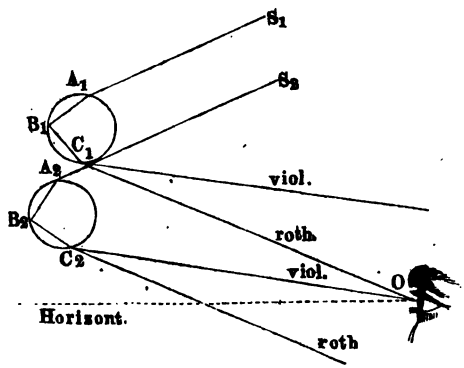
von zwei gegenüberliegenden Punkten $S_1$ und $S_2$ des Sonnenrandes (Fig. 97) ausgehenden Strahlenbündeln muß es zwei geben, welche (nach ihrer Kreuzung im Punkte $P$) bei $D_1$ und $D_2$ Regentropfen so treffen, daß sie unter dem Ablenkungswinkel von $42^0\,2'$ ins Auge reflectirt werden. Aus den beiden Dreiecken $D_1 E O$ und $D_2 E P$ folgt aber, weil $\measuredangle D_1 = D_2$ und $\measuredangle E = E$, auch $\measuredangle D_1 O D_2 = D_1 P D_2 = 32'$ (in der Figur mußte dieser Winkel vielmal größer dargestellt werden).

15. Berechnet man wieder, wie in Aufgabe 12, aus der Relation $w = 4\beta - 2\alpha$, mit Hülfe der Gleichung $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\left(\frac{109}{81}\right)}$ für alle möglichen Werthe des Einfallswinkels $\alpha$ die zugehörigen Ablenkungswinkel $w$, wovon hier nur die folgenden stehen mögen:

| Einfallsw. $\alpha_1$ | Brechungsw. $\beta_1$ | Ablenkungsw. $w_1$ |
|---|---|---|
| $58^0$ | $39^0\ 15'\ 45''$ | $41^0\ 3'$ |
| $58^0\ 40'$ | $39^0\ 24'$ | $40^0\ 16'$ |
| 59 | 39 46 4 | 41 4 |

so ergiebt sich, daß der violette Lichtbogen einen scheinbaren Halbmesser von $40^0\,16'$ hat, daß also durch den leuchtenden Punkt ein verschieden gefärbter ringförmiger Streifen von $42^0\,2' - 40^0\,16' = 1^0\,46'$ Breite entsteht, dessen äußerer Rand roth, dessen innerer violett erscheint (während der Zwischenraum orange, gelb, grün und blau gefärbt sich darstellt). Uebrigens ist einleuchtend, daß die verschieden gefärbten Strahlen ihrer großen Divergenz wegen nicht aus dem nämlichen Tropfen ins Auge gelangen können. Die Figur 98 erläutert, welche Lage zwei Tropfen haben müssen, damit

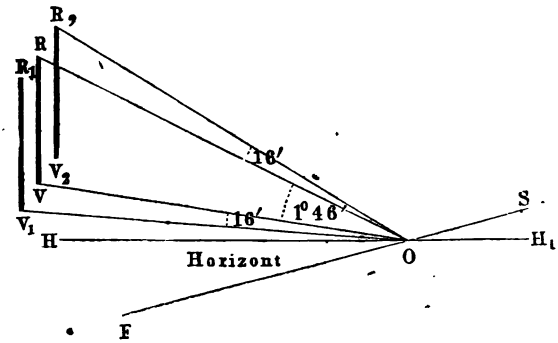
Fig. 98.




aus dem einen ein rother, aus dem andern ein violetter Strahl ins Auge gelangt, wobei zu bemerken ist, daß bei richtiger Darstellung der Winkel $C_1 O C_2 = 1^0\,46'$ sein müßte.

16. Setzt man an die Stelle des leuchtenden Punktes der vorigen Aufgabe die Sonne mit ihrem scheinbaren Durchmesser von 32′, so muß von jedem Punkt der Sonne ein dem vorhin beschriebenen ähnlicher ringförmiger Streifen mit den Spectralfarben entstehen. Stellt (Fig. 99) $RV$ einen nach

Fig. 99.




dem Krümmungsmittelpunkt gerichteten Durchschnitt desjenigen Streifens dar, der dem vom Mittelpunkt der Sonne herkommenden Strahlenbündel seine Entstehung verdankt, sowie $R_1 V_1$ und $R_2 V_2$ dasselbe bezüglich der von zwei entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes kommenden Strahlenbündel (welche drei Durchschnitte in eine Linie zusammenfallend zu denken sind), so ergiebt sich die Breite des Regenbogens, nämlich $\measuredangle V_1 O R_2 = V_1 O V + V O R + R O R_2 = 16' + 1^0 46' + 16' = 2^0 18'$.

Das Roth liegt an der äußern (convexen), das Violett auf der innern (concaven) Seite des Regenbogens.

Denken wir uns die Figur 99 als einen verticalen Durchschnitt durch den höchsten Punkt des Regenbogens, so stellt $HOR_2$ seine scheinbare Höhe dar. Nun ist

$$\measuredangle HOR_2 = HOR + ROR_2$$
$$HOR = FOR - HOF$$
$$= w - h, \text{ wenn } h \text{ die scheinbare Höhe des Sonnenmittelpunktes bezeichnet,}$$
$$= 42^0 2' - h,$$
$$ROR_2 = 16',$$

folglich $\measuredangle HOR_2 = 42^0 2' - h + 16'$.

Die größte Höhe, nämlich $42^0 2'$, erreicht daher der Regenbogen, wenn der untere Rand der Sonne im Horizont steht, weil dann $h = 16'$ ist.

17. In dem Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 100) ist die Summe der Polygonwinkel $= 540^0$, $\angle C = \angle B = 2\beta$ und $\angle A = \angle D = 180^0 + \beta - \alpha$, also ist $\gamma = 540^0 - 2 . 2\beta - 2 . (180^0 + \beta - \alpha) = 180^0 + 2\alpha - 6\beta$.

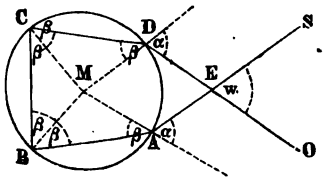
18. Berechnet man ähnlich, wie in den Aufgaben 12 und 14, aus der in voriger Auflösung gefundenen Relation die Ablenkungswinkel $\gamma$ für die ver-

schiedenen Einfallswinkel $\alpha$ zwischen $0^0$ und $90^0$, so findet man, wie früher das Brechungsverhältniß $n$ für rothe Strahlen $= \frac{108}{81}$ für violette $= \frac{109}{81}$ annehmend:

| Einfallsw. $\alpha$ für | | Brechungsw. $\beta$ für | | Ablenkungsw. $w$ für | |
|---|---|---|---|---|---|
| Roth. | Violett. | Roth. | Violett. | Roth. | Violett. |
| $71^0$ | $71^0$ | $45^0\,9'\,54''$ | $44^0\,38'\,19'$ | $51^0\,0'\,16''$ | $54^0\,10'\,6''$ |
| $71^0\,49'\,55''$ | $71^0\,26'\,9''$ | 45 26 51 | 49 47 7 | 50 58′ | 54 10 |
| $72^0$ | $72^0$ | 45 30 12 | 44 58 15 | 50 58 48 | 54 10 30 |

woraus mittelst ähnlicher Schlüsse, wie in den Aufgaben 13, 14 und 15 folgt, daß im zweiten Regenbogen der Halbmesser des rothen Lichtes $= 50^0\,58'$, der des violetten $= 54^0\,10'$, beide bis zur Mitte gerechnet, daß also die Breite des zweiten Regenbogens $= (54^0\,10' - 50^0\,58') + 32' = 3^0\,44'$ ist, wenn der scheinbare Durchmesser der Sonne $= 32'$ gesetzt wird. Die beiden Regenbogen sind um ungefähr $50^0\,58' - 16' - 42^0\,2' = 8^0\,40'$ von einander entfernt.

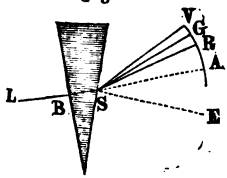
Fig. 100.




Die größere Lichtschwäche des zweiten gegen den Hauptregenbogen erklärt sich aus dem größern Lichtverlust bei der zweifachen Reflexion der Strahlen in den Tropfen.

19. Bezeichnet $\beta_r$ den Brechungswinkel $ESR$ (Fig. 101) des rothen Strahls,
$\beta$ „ „ $ESG$ des mittlern (gelben) „
$\beta_v$ „ „ $ESV$ „ violetten „
so ist der Zerstreuungswinkel $RSV = \beta_v - \beta_r$, der Ablenkungswinkel $ASG$ des gelben Strahls $= \beta - \alpha$. Nun ist, wenn die Winkel $\alpha$, $\beta_r$, $\beta$, $\beta_v$ sehr klein sind, also ihren Sinus proportional angenommen werden können, der Definition des Brechungsverhältnisses gemäß $\beta_r = n_r \,.\, \alpha$, $\beta = n \,.\, \alpha$, $\beta_v = n_v \,.\, \alpha$, folglich, wenn man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdrücken substituirt,

Fig. 101.




die Farbenzerstreuung $= (n_v - n_r) \,.\, \alpha$,
die Ablenkung des mittlern Strahls $= (n - 1) \,.\, \alpha$.

20. Da der Lichtstrahl $LB$ in diesem Falle ungebrochen oder fast ungebrochen in das Prisma geht, also der Einfallswinkel des auf die zweite Seite des Prismas treffenden Strahls dem brechenden Winkel des Prismas gleich oder nahe gleich ist, so hat man nach voriger Aufgabe

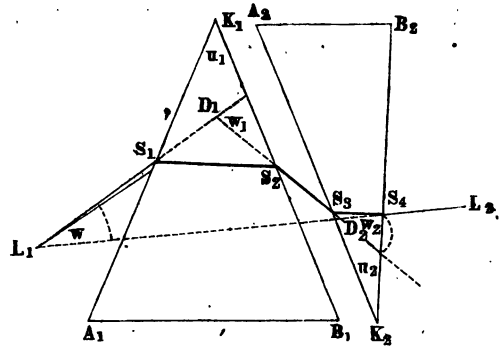
die Farbenzerstreuung $= (n_v - n_r)\, u$,
die Ablenkung des mittlern Strahls $= (n - 1)\, u$.

21. Aus Fig. 101 ergiebt sich unmittelbar: die Ablenkung des rothen Strahls ist gleich dem Ablenkungswinkel des mittlern Strahls weniger dem Zer-

streuungswinkel zwischen dem mittlern und rothen Strahl, also $= (n-1)u - (n - n_r)\,u = (n_r - 1)\,u$. Die Ablenkung des violetten Strahls ist $= (n-1)\,u + (n_v - n)\,u = (n_v - 1)\,u$.

22. Bestimmen wir zuerst die Ablenkung $w$ des mittlern Strahls. Aus dem $\triangle D_1 D_2 L_1$ (Fig. 102), wovon $w_1$ ein Außenwinkel ist, ergiebt sich $w = w_1$

Fig. 102.




$- \angle D_1 D_2 L_1$, also, da $D_1 D_2 L_1 = w_2$ ist, $w = w_1 - w_2$. Nun ist aber der Aufgabe 20 gemäß $w_1 = (n_1 - 1)\,u_1$ und $w_2 = (n_2 - 1)\,u_2$, folglich $w = (n_1 - 1)\,u_1 - (n_2 - 1)\,u_2$. Auf ähnliche Weise erhält man auf den Grund der Aufgabe 21: $w_r = w_{1r} - w_{2r} = (n_{1r} - 1)\,u_1 - (n_{2r} - 1)\,u_2$; $w_v = w_{1v} - w_{2v} = (n_{1v} - 1)\,u_1 - (n_{2v} - 1)\,u_2$.

23. a) Damit der mittlere Strahl ungebrochen austrete, muß (siehe Auflösung der vorigen Aufgabe)

$$w = (n_1 - 1)\,u_1 - (n_2 - 1)\,u_2 = 0, \text{ also } \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \text{ sein.}$$

In gleicher Weise erhält man zu b):

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_{2r} - 1}{n_{1r} - 1}; \text{ zu c) } \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_{2v} - 1}{n_{1v} - 1}.$$

24. a) In diesem Falle muß $w = w_r$, also (siehe Auflösung der Aufgabe 22) $(n_1 - 1)\,u_1 - (n_2 - 1)\,u_2 = (n_{1r} - 1)\,u_1 - (n_{2r} - 1)\,u_2$ sein, woraus folgt $\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2 - n_{2r}}{n_1 - n_{1r}}$.

b) $w$ muß $= w_v$ sein, woraus folgt $\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2 - n_{2v}}{n_1 - n_{1v}}$,

c) $w_r$ muß $= w_v$ sein, also $\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_{1v} - n_{1r}}$.

Damit also zwei Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zusammenfallen, müssen sich die brechenden Winkel der beiden Prismen umgekehrt verhalten wie die Differenzen der Brechungsquotienten der betreffenden Strahlen.

25. Ad 1) Aus Aufgabe 23 folgt:

$$a)\ u_2 = \frac{n_{1r} - 1}{n_{2r} - 1} u_1 = \frac{0{\cdot}5258}{0{\cdot}6277} \cdot 25^0 = 20^0\,56'\,30'',$$

$$b)\ u_2 = \frac{n_{1v} - 1}{n_{2v} - 1} u_1 = \frac{0{\cdot}5466}{0{\cdot}6711} \cdot 25^0 = 20^0\,21'\,44''.$$

Ad 2) ergiebt sich aus Aufgabe 24:

$$u_2 = \frac{n_{1v} - n_{1r}}{n_{2v} - n_{2r}} u_1 = \frac{0{\cdot}0208}{0{\cdot}0434} \cdot 25^0 = 11^0\,58'\,54''.$$

Ad 3) findet sich aus Aufgabe 22:

$$w = (n_1 - 1)\ u_1 - (n_2 - 1)\ u_2 = 0{\cdot}533\ .\ 25^0 - 0{\cdot}642\ .\ 11^0\,58'\,54'' = 5^0\,38'.$$

26. Weil die Farbenvertheilung im Crownglasspectrum und im Flintglasspectrum nicht proportional ist, d. h. die durch die Fraunhofer'schen Linien begrenzten Theile der beiden Spectra nicht in gleichem Verhältnisse stehen (vergl. Tab. 24).

27. Man erhält aus Tabelle 22, $\frac{n_v - n_r}{n - 1} = 0{\cdot}052$, sowie $n - 1 = 0{\cdot}642$, also $n_v - n_r = 0{\cdot}052\ .\ 0{\cdot}642 = 0{\cdot}0334$, folglich ist der Zerstreuungswinkel $(n_v - n_r)\ u = 0{\cdot}0334\ .\ 10^0 = 20{\cdot}04$ Minuten.

28. Die Aufgaben 24, c. und 22 ergeben die beiden für den vorliegenden Fall anwendbaren Bedingungsgleichungen

$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_{1v} - n_{1r}}$ und $w = (n_1 - 1)\ u_1 - (n_2 - 1)\ u_2$, woraus

$$u_1 = \frac{w\ (n_{2v} - n_{2r})}{(n_1 - 1)\ (n_{2v} - n_{2r}) - (n_2 - 1)\ (n_{1v} - n_{1r})};$$

$$u_2 = \frac{w\ (n_{1v} - n_{1r})}{(n_1 - 1)\ (n_{2v} - n_{2r}) - (n_2 - 1)\ (n_{1v} - n_{1r})};$$ oder,

wenn man Zähler und Nenner beider Quotienten durch $(n_1 - 1)\ (n_2 - 1)$ dividirt und $\frac{n_{1v} - n_{1r}}{n_1 - 1} = z_1$, sowie $\frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_2 - 1} = z_2$ setzt,

$$u_1 = \frac{\frac{w}{n_1 - 1} \cdot z_2}{z_2 - z_1};\quad u_2 = \frac{\frac{w}{n_2 - 1} \cdot z_1}{z_2 - z_1},$$ also, wenn man die entsprechenden Werthe der Aufgabe substituirt, $u_1 = 18^0\,13'\,4''$; $u_2 = 8^0\,53'\,40''$.

29. a) Nach XXVIII., 56 ist

$$p = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} \text{ oder } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \quad \ldots\ (I),$$

welche Gleichung sich auf die mittleren Strahlen bezieht, wofür gewöhnlich die der Linie $E$ im Spectrum genommen werden. Ebenso bestehen für die

rothen und violetten, den Linien $B$ und $H$ entsprechenden Strahlen die Gleichungen

$$\frac{1}{p_r} = \frac{1}{p_{1r}} - \frac{1}{p_{2r}}; \quad \frac{1}{p_v} = \frac{1}{p_{1v}} - \frac{1}{p_{2v}}.$$

Bezeichnen $r_1$ und $r_1$ die Krümmungshalbmesser der Convexlinse, $r_2$ und $r_2$ die der Concavlinse, so gehen diese letzteren Formeln durch entsprechende Substitutionen (nach Aufg. XXVIII., 38, Formel II.) über in

$$\frac{1}{p_r} = (n_{1r} - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) - (n_{2r} - 1)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\text{und } \frac{1}{p_v} = (n_{1v} - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) - (n_{2v} - 1)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Damit aber die rothen und violetten Strahlen zusammenfallen, muß $\frac{1}{p_v} = \frac{1}{p_r}$ sein, also, wenn man zugleich (wieder XXVIII., 38, Formel II.)

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{(n_1 - 1)p_1} \text{ und } \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{(n_2 - 1)p_2} \text{ setzt,}$$

$$\frac{n_{1v} - n_{1r}}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_2 - 1} \cdot \frac{1}{p_2} \text{ oder } \frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{n_{1r} - n_{1v}}{n_1 - 1}}{\frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_2 - 1}},$$

oder, wenn $z_1$ das Zerstreuungsvermögen des Spiegelglases, $z_2$ das des Flintglases bezeichnet (Aufgabe 27),

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad \ldots \quad \text{(II.)}$$

Bedingung für den Achromatismus ist also, daß sich die Brennweite der convexen Spiegelglaslinse zur Zerstreuungsweite der concaven Flintglaslinse wie die Zerstreuungsvermögen der beiden Glassorten verhalten.

Aus den beiden Bedingungsgleichungen I. und II. folgt nun $p_1 = \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)p$, $p_2 = \left(\frac{z_2}{z_1} - 1\right)p$; also, wenn man die Werthe der Aufgabe substituirt, $p_1 = \left(1 - \frac{0{\cdot}0394}{0{\cdot}0670}\right) . 48 = 19{\cdot}776$ cm; $p_2 = \left(\frac{0{\cdot}0670}{0{\cdot}0394} - 1\right) . 48 = 33{\cdot}624$ cm.

b) Für die planconvexe Spiegelglaslinse folgt aus Formel II. der Aufgabe 38 in XXVIII., $(n_1 - 1)\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1}$ und daraus $r_1 = (n_1 - 1)p_1 = 0{\cdot}533 . 19{\cdot}776 = 10{\cdot}54$; für die planconcave Flintglaslinse erhält man aus Aufgabe 53 in XXVIII. ebenso $r_2 = (n_2 - 1)\ p_2 = 0{\cdot}642 . 33{\cdot}624 = 21{\cdot}588$ cm. Für die angenommenen Glassorten müßte also der Krümmungshalbmesser der planconcaven Flintglaslinse 2·05mal so groß sein als der der planconvexen Spiegelglaslinse.

# Auflösungen zu XXX.

1. Nahe Gegenstände erscheinen dem Auge deshalb undeutlich, weil die von einem Punkte des Gegenstandes ins Auge fallenden Strahlen sich nicht auf der Netzhaut, sondern erst hinter derselben vereinigen, auf der Netzhaut also von jedem Punkt des Gegenstandes Zerstreuungskreise entstehen, die nur einen unvollkommenen Lichteindruck machen. Gelangen aber die Lichtstrahlen des Gegenstandes nur durch eine sehr feine Oeffnung (z. B. in einem Kartenblatt) ins Auge, so wird jener Zerstreuungskreis sehr klein, so daß von jeder Stelle der Netzhaut ein bestimmter, irgend einem Punkte des Gegenstandes entsprechender Lichteindruck zu unserm Bewußtsein gelangt. Natürlich wird der Gegenstand weniger hell wohl aber wegen des größern Sehwinkels größer erscheinen, als in der gewöhnlichen Sehweite.

2. Durch jede der beiden Oeffnungen gelangt von jedem Punkte des Gegenstandes ein dünnes Lichtbündel ins Auge. Ist der Gegenstand nahe, so geben die beiden Lichtbündel, welche von irgend einem Punkte desselben ausgehen, zwei Bilder auf der Netzhaut, weil sie eine solche Convergenz haben, daß sie sich erst hinter der Netzhaut schneiden würden. Befindet sich der Gegenstand in der Weite des deutlichen Sehens, so findet die Vereinigung gerade auf der Netzhaut statt. Bei weiterer Entfernung des Gegenstandes schneiden sich die Lichtbündel im Auge vor der Netzhaut und treten dann wieder getrennt auf die Netzhaut.

   Es geht daraus hervor, daß ein Auge beim Sehen durch eine nahe vor ihm befindliche feine Oeffnung im normalen Zustande ist.

3. Befindet sich wie gewöhnlich die Sammellinse sehr nahe am Auge, so ist die Entfernung des zu betrachtenden Gegenstandes von der Linse $= 30$ cm und die Entfernung des imaginairen Bildes desselben $= D$, man hat also in der allgemeinen Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{q}$ (Aufgabe 39 in XXVIII.) im gegenwärtigen Falle $a = 30$ cm, $\alpha = -D$ zu setzen, so daß man erhält: $\frac{1}{30} - \frac{1}{D} = \frac{1}{p}$, woraus folgt $p = \frac{30 \cdot D}{D - 30}$.

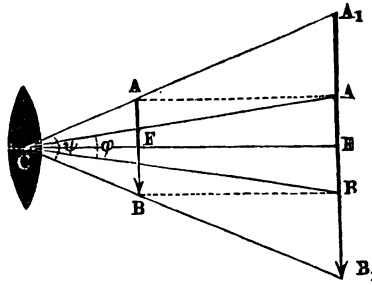
4. Man findet, da auch hier $a = 30$ cm, $\alpha = -D$, aber auch $p$ negativ zu setzen ist, aus $\frac{1}{30} - \frac{1}{D} = -\frac{1}{p}$, $p = \frac{30 \cdot D}{20 - D}$, welche Formel sich aus der vorher gefundenen ergiebt, wenn man in dieser $p$ negativ annimmt.

5. Eine Sammellinse, deren Brennweite $= \frac{30 \cdot 60}{60 - 30} = 60$ cm ist.

6. Eine Zerstreuungslinse, deren Zerstreuungsweite $= \frac{30 \cdot 12}{30 - 12} = 20$ cm ist.

7. Bezeichnet $\varphi$, Fig. 103, den Sehwinkel, unter welchem ein Gegenstand $AB$ einem in $C$ befindlichen (unbewaffneten) Auge in der deutlichen Sehweite $CE$ erscheint, sowie $\psi$ den Sehwinkel, unter welchem das Bild des Gegenstandes in der deutlichen Sehweite gesehen wird, wenn man denselben durch eine dicht vors Auge gebrachte Loupe in der Entfernung $CF$ betrachtet, so drückt $\frac{\psi}{\varphi}$ (annähernd) die lineare Vergrößerung durch die Loupe aus. Es ist aber, wenn $CF = a$ und $CE = D$ gesetzt wird, $tg\ ^1/_2\ \psi = \frac{^1/_2 AB}{a}$, $tg\ ^1/_2\ \varphi = \frac{^1/_2\ AB}{D}$, also $\frac{tg\ ^1/_2 \psi}{tg\ ^1/_2 \varphi} = \frac{D}{a}$, demnach näherungsweise $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{D}{a}$ (vergl. Aufg. 45 in XXVIII.), oder, wenn für $a$ sein Werth aus der Gleichung $\frac{1}{a} - \frac{1}{D} = \frac{1}{p}$, nämlich $a = \frac{Dp}{D + p}$ gesetzt wird, $= \frac{D + p}{p} = \frac{D}{p} + 1$. Häufig wird jedoch nur $\frac{D}{p}$ als lineare Vergrößerung angenommen, was für den Fall genau ist, wenn der betrachtete Gegenstand im Brennpunkte sich befindet, wenn also das Auge für parallel auffallende Strahlen adaptirt ist.

Fig. 103.




8. a) $\frac{30 + 60}{6} = 6$. b) $\frac{12}{6} + 1 = 3$. c) $\frac{96}{6} = 16$.

9. Für ein normales Auge, dessen deutliche Sehweite $= 30$ cm ist, ist die Linearvergrößerung $= \frac{30 + 1{\cdot}5}{1{\cdot}5} = 21$, die Flächenvergrößerung $= 21^2 = 441$.

10. Mittelst der Loupe gelangt, wenn der Oeffnungsdurchmesser der Pupille mit $\delta$ bezeichnet wird, $\frac{d^2}{\delta^2}$ mal so viel Licht ins Auge, als ohne dieselbe; das Bild auf der Netzhaut aber wird, wenn $n$ die Linearvergrößerung bezeichnet, $n^2$ mal so groß, als es ohne die Loupe sein würde, also ist $H = \frac{d^2}{\delta^2 n^2}$,

oder, wenn man für $n$ (nach Aufgabe 7) seinen Werth $\frac{D}{p}$ setzt, wo $D$ die deutliche Sehweite des Auges bezeichnet, $H = \frac{d^2\,p^2}{\delta^2\,D^2}$. Nimmt man (nach Prechtl) $\delta = 0{\cdot}06$ Zoll, so ist $H = \frac{d^2\,p^2}{0{\cdot}0036\,.\,D^2}$, also für ein normales Auge $H = \frac{d^2\,p^2}{0{\cdot}36}$, oder im vorliegenden Falle $= \frac{0{\cdot}8^2\,.\,0{\cdot}3^2}{0{\cdot}36} = 0{\cdot}16$ (woraus die Nothwendigkeit einer guten und nöthigenfalls künstlichen Beleuchtung des Objectes hervorgeht).

11. Da ihr Brechungsvermögen größer, ihr Farbenzerstreuungsvermögen aber kleiner ist, als bei Glaslinsen, so geben sie bei gleichen Krümmungen eine stärkere Vergrößerung und mehr Deutlichkeit der Bilder. Bei gleichen Vergrößerungen sind die Krümmungen der Saphir- und noch mehr die der Diamantlinsen geringer, als die der Glaslinsen, gestatten also eine größere Oeffnung, wodurch das Gesichtsfeld und die Helligkeit größer werden.

12. Die durch Linsen bewirkten Vergrößerungen verhalten sich (Aufgabe 7) umgekehrt wie ihre Brennweiten. Nun ist aber, wenn $r$ die gleichen Krümmungshalbmesser bezeichnet, nach Aufl. zu 38 in XXVIII. und Tabelle 21 des Anhanges die Brennweite

für Biconvexlinsen aus Crownglas $= \frac{r}{2\,(1{\cdot}533 - 1)} = \frac{r}{1{\cdot}066}$,

„ „ „ Saphir $= \frac{r}{2\,(1{\cdot}768 - 1)} = \frac{r}{1{\cdot}536}$,

„ „ „ Diamant $= \frac{r}{2\,(2{\cdot}47 - 1)} = \frac{r}{2{\cdot}94}$,

folglich verhalten sich die Vergrößerungen der fraglichen Linsen zu einander, wie 11 : 15 : 29.

14. Aus der Formel I. der Aufg. 38 und der Aufg. 27 in XXVIII. folgt für den vorliegenden Fall

$$\left(\frac{m}{n} - 1\right) \cdot \frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \text{ und daraus } r = \frac{2\,(m - n)\,a\alpha}{n\,(a + \alpha)}$$

$$= \frac{2\,.\,0{\cdot}197\,.\,10\,.\,1}{1{\cdot}336\,.\,(10 + 1)} = 0{\cdot}268 \text{ Zoll.}$$

15. a) Die auf die erste Linse fallenden der Axe parallelen Strahlen würden sich in deren Brennpunkt vereinigen, wenn die zweite Linse nicht vorhanden wäre, sie fallen also convergirend auf die zweite Linse und die Entfernung ihres wirklichen Vereinigungspunktes von dieser, d. h. die Brennweite $p$ der Linsenverbindung findet sich aus der allgemeinen Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$, wenn man darin, der Aufgabe 39, 6 im Abschnitt XXVIII. entsprechend,

$a = -(f_1 - d)$, $\alpha = f$ und $p = f_2$, also aus der Formel $-\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}$ oder $\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$, woraus $f = \frac{(f_1 - d) f_2}{(f_1 - d) + f_2} = \frac{(8 - 2) \cdot 6}{(8 - 2) + 6} = 3$ Zoll folgt.

b) Ist die zweite Linse eine concave, so ist in der vorhergehenden Formel $f_2$ negativ und $d = 0$ zu setzen, wodurch man erhält $f = \frac{f_1 f_2}{f_1 - f_2} = \frac{8 \cdot 6}{8 - 6} = 24$ Zoll.

16. Nach der vorhergehenden Aufgabe ist die Brennweite der Doppellouppe $= \frac{5 \cdot 4}{5 + 4} = 2^2/_9$ Zoll, folglich die lineare Vergrößerung für ein normales Auge (nach Aufgabe 7) $= \frac{10}{2^2/_9} = 4{\cdot}5$.

17. Bei einem solchen zusammengesetzten Mikroskop ist sowohl die sphärische als die chromatische Aberration geringer als bei einem ebenso stark vergrößernden einfachen, nicht bloß weil die Krümmungshalbmesser der beiden Linsen des erstern größer sind als die der letztern, sondern auch weil bei jenem die von der einen Linse herrührenden Aberrationen zum Theil von der andern aufgehoben werden. Eine solche Linsenverbindung gestattet also bei gleicher Deutlichkeit der Bilder eine größere Oeffnung, gewährt also mehr Helligkeit und ein größeres Gesichtsfeld.

18. Die Entfernung $\alpha$ des Sammelbildes $A_1 Z_1$ vom Objectiv findet sich (Aufg. 39 in XXVIII.) $= \frac{a_1 p_1}{a_1 - p_1} = \frac{2{\cdot}05 \cdot 2}{2{\cdot}05 - 2} = 82$ Linien, das Sammelbild ist also $\frac{\alpha}{a_1} = \frac{82}{2{\cdot}05} = 40$mal so groß, als der Gegenstand vor dem Objectiv (XXVIII, 45). Damit nun dieses Sammelbild durch das Ocular deutlich gesehen werde, müssen die davon ausgehenden Strahlen im Ocular so gebrochen werden, als kämen sie von Punkten, die um $D = 120$ Linien vom Ocular entfernt sind, die Entfernung $a_2$ des Oculars vom Sammelbild $A_1 Z_1$ ist also

$$= \frac{D p_2}{D + p_2} = \frac{120 \cdot 8}{120 + 8} = 7{\cdot}5 \text{ Linien},$$

folglich das geometrische Bild $A_2 Z_2$ des Oculars $\frac{D}{a_2} = \frac{120}{7{\cdot}5} = 16$ mal so groß, als das Sammelbild $A_1 Z_1$ des Objectivs, und demnach die Vergrößerung überhaupt $= \frac{\alpha}{a_1} \cdot \frac{D}{a_2}$, oder, wenn man $\frac{D p_2}{D + p_2}$ für $a_2$ setzt,

$$= \frac{\alpha}{a_1} \cdot \frac{D + p_2}{p_2} = 40 \cdot 16 = 640.$$

Gewöhnlich wird $p_2$ statt $a_2$ gesetzt, also angenommen, das Sammelbild falle gerade in die Brennweite des Oculars und das Auge sei für parallele Strahlen adaptirt. Dann ist die Vergrößerung des Mikroskops

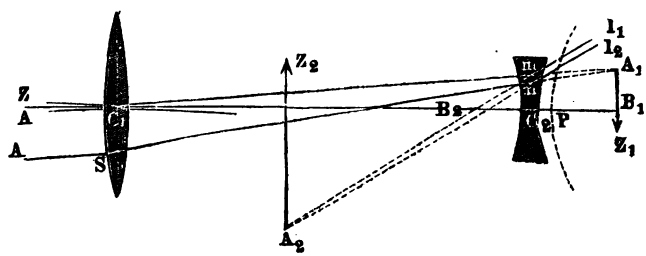
$$= \frac{\alpha}{a_1} \cdot \frac{D}{p_2} = \frac{82}{2{\cdot}05} \cdot \frac{120}{8} = 600.$$

Die Länge des Mikroskops ist $= \alpha + a_2$, oder unter der zuletzt erwähnten Annahme $= \alpha + p_2 = 82 + 8 = 90$ Linien.

19. Man bringt das Mikrometer an die Stelle des Objects vor dem Objectiv, so daß die getheilte Linie im Gesichtsfelde die Lage des Durchmessers einnimmt, so giebt die Theilung die Größe dieses Durchmessers des Gesichtsfeldes unmittelbar an. Dividirt man den Durchmesser des Diaphragmas durch den Durchmesser des Gesichtsfeldes, so erhält man die Vergrößerung des Objectivs, welche Zahl noch mit der nach 7. zu findenden Vergrößerung des Oculars zu multipliciren ist.

20. Es sei (Fig. 104) $C_1 S$ die Convexlinse, $C_2 m$ die Concavlinse, $A_1 Z_1$ das Sammelbild, welches die vor der Convexlinse befindliche (in der Figur

Fig. 104.



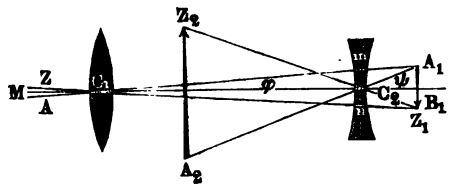

aber weggelassene) Linie $A Z$ hinter der Linse geben würde, wenn die Concavlinse nicht vorhanden wäre. Um den Gang der vom Punkte $A$ herkommenden Strahlen $A C_1$ und $A S$ nach ihrer Brechung in den beiden Linsengläsern zu finden, verfahre man nach den Aufgaben 30 und 35 in XXVIII. Die beiden aus dem Concavglas fahrenden Strahlen $m l_1$ und $n l_2$ verlängere man rückwärts bis zu ihrem Durchschnittspunkte $A_2$, so ist dieser das geometrische Bild des Punktes $A$. Auf gleiche Weise bestimmt sich auch das Bild $Z_2$ des Punktes $Z$.

21. 1) Da das concave Ocular (Fig. 105 a. f. S.) innerhalb der Brennweite $C_1 B_1$ des convexen Objectivs so liegen muß, daß es vom Brennpunkte desselben um seine Zerstreuungsweite entfernt ist, so ist die Länge des Fernrohrs $= C_1 B_1 - C_2 B_1 = p_1 - p_2 = 5 - 1 = 4$ Zoll.

2) Die Vergrößerung findet man aus der Vergleichung der beiden Sehwinkel, unter welchen ein Gegenstand dem Auge ohne und durch das Fernrohr erscheint.

Ohne Fernrohr erscheint ein weit entfernter Gegenstand dem hinter dem Ocular befindlichen Auge unter nahe demselben Winkel, wie einem im Punkte $C_1$ des Objectivs befindlichen. Es sei dieser Winkel $A\,C_1\,Z = A_1\,C_1\,Z_1 = 2\,\varphi$. Mittelst des Fernrohrs erscheint er unter dem Winkel $A_2\,C_2\,Z_2 = A_1\,C_2\,Z_1 = 2\,\psi$. Die Vergrößerung ist also $\frac{\psi}{\varphi}$.

Fig. 105.




Da nun $tang\ \psi = \frac{A_1\,B_1}{C_2\,B_1} = \frac{A_1\,B_1}{p_2}$,

$$tang\ \varphi = \frac{A_1\,B_1}{C_1\,B_1} = \frac{A_1\,B_1}{p_1}$$

und da, wegen der Kleinheit der Winkel $\psi$ und $\varphi$,

$$\frac{tang\ \psi}{tang\ \varphi} = \frac{\psi}{\varphi} \text{ ist,}$$

so ergiebt sich die Vergrößerung $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{p_1}{p_2} = {}^5/_1 = 5$.

3) Sind $A\,m$ und $Z\,n$ die äußersten Strahlen, welche bei unverrückter Lage des Auges hinter dem Ocular in dasselbe gelangen, so ist der Winkel $A\,C_1\,M = m\,C_1\,C_2 = \varphi$ der halbe Sehwinkel. Damit das Auge durch das Fernrohr ein möglichst großes Gesichtsfeld übersehe, muß es sich dicht hinter dem Ocular befinden; dann ist bei unverrückter Lage des Auges der ausreichende Oeffnungsdurchmesser des Oculars gleich dem Oeffnungsdurchmesser $\delta$ der Pupille, der hier, nach Prechtl, zu 0·1 Zoll angenommen werden kann. Man hat demnach aus dem Dreieck $C_1\,C_2\,m$ . . . . $tang\ \varphi = \frac{C_2\,m}{C_2\,C_1} = \frac{0{\cdot}5\ .\ \delta}{p_1 - p_2} = \frac{0{\cdot}5\ .\ 0{\cdot}1}{5 - 1} = 0{\cdot}0125$, also $\varphi = 0{\cdot}0125\ .\ 3438$*) $= 43$ Minuten, folglich das ganze Gesichtsfeld bei unverrückter Lage des Auges $= 86$ Minuten.

Wenn, wie gewöhnlich, der Oeffnungsdurchmesser des Oculars größer ist, als der der Pupille, so kann man durch Hin- und Herbewegen des Auges ein größeres Gesichtsfeld übersehen.

22. Durch ähnliche Erwägungen, wie bei voriger Aufgabe, findet sich:

---

*) Bezeichnet $l$ die Länge des kleinen Kreisbogens in Theilen des Halbmessers $= 1$, mit welchem $tang\ \varphi$ wegen der Kleinheit des Winkels $\varphi$ zusammenfällt, so findet sich der zu diesem Bogen gehörige Mittelpunktswinkel $x$ in Minuten aus der Proportion $l : \pi = x : (180\ .\ 60)$, nämlich $x = \frac{180\ .\ 60}{3{\cdot}1416} \cdot l = 3438\,l$ Minuten.

1) Die Länge des Fernrohrs $= p_1 + p_2 = 15 + 0{\cdot}5 = 15{\cdot}5$ Zoll.

2) Seine Vergrößerung $= \frac{p_1}{p_2} = \frac{15}{0{\cdot}5} = 30.$

3) Bezeichnet $\varphi$ den halben Sehwinkel und $d$ den Oeffnungsdurchmesser des Oculars, so ist $tang\ \varphi = \frac{0{\cdot}5\ .\ d}{p_1 + p_2}$, also $\varphi = \frac{0{\cdot}5\ .\ d}{p_1 + p_2} \cdot 3438$ Minuten. Der Oeffnungsdurchmesser $d$ des Oculars kann bis zu 0·6 seiner Brennweite genommen werden. Nimmt man $d = 0{\cdot}5\ p_2$, so ist $2\ \varphi$ oder der ganze Sehwinkel $= \frac{0{\cdot}5\ p_2}{p_1 + p_2} \cdot 3438$ Minuten, also im vorliegenden Fall $\frac{0{\cdot}5\ .\ 0{\cdot}5}{15 + 0{\cdot}5} \cdot 3438 = 55{\cdot}4$ Minuten.

23. Weil bei starker Vergrößerung sein Gesichtsfeld ein sehr kleines und bei gleicher Vergrößerung ein viel kleineres ist, als bei einem Fernrohr mit convexem Ocular. So würde man z. B., wenn man im Fernrohr der vorigen Aufgabe statt des convexen Oculars ein concaves von derselben Brennweite nehmen (natürlich aber an die gehörige Stelle innerhalb der Brennweite des Objectivs setzen) wollte, ein Fernrohr erhalten, dessen Vergrößerung nach Aufgabe 21 dieselbe, dessen Gesichtsfeld aber nur $= \frac{0{\cdot}1}{14{\cdot}5} \cdot 3438 = 23{\cdot}7$ Minuten, also nur ungefähr $^4/_7$ von jenem wäre.

24. Die Vergrößerung ist (Fig. 106 a. f. S.) nahe $= \frac{\sphericalangle\ A_3\ C_4\ B_3}{\sphericalangle\ A_1\ C_1\ B_1} = \frac{\psi}{\varphi}$ (siehe Aufgabe 21).

Nun ist $tang\ \psi = \frac{A_3\ B_3}{B_3\ C_4}$ . . . . . (I).

Aus den ähnlichen Dreiecken $A_3\ B_3\ C_3$ und $A_2\ B_2\ C_3$ folgt aber

$$A_3\ B_3 = \frac{A_2\ B_2}{B_2\ C_3} \cdot B_3\ C_3,$$

und aus den ähnlichen Dreiecken $A_2\ B_2\ C_2$ und $A_1\ B_1\ C_2$

$$A_2\ B_2 = \frac{A_1\ B_1}{B_1\ C_2} \cdot B_2\ C_2.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung I. ergiebt sich

$$tang\ \psi = \frac{A_1\ B_1\ .\ B_2\ C_2\ .\ B_3\ C_3}{B_1\ C_2\ .\ B_2\ C_3\ .\ B_3\ C_4}.$$

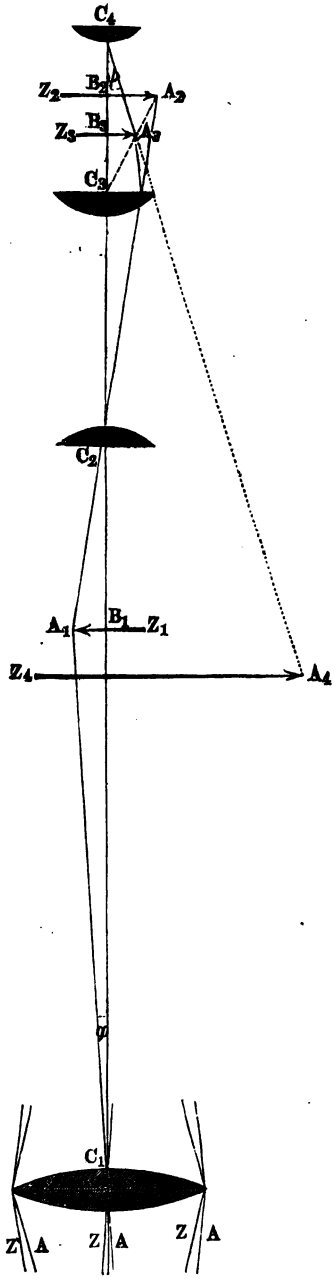
Ferner ist $tang\ \varphi = \frac{A_1\ B_1}{B_1\ C_1}$,

folglich $\frac{tang\ \psi}{tang\ \varphi}$, oder wegen der Kleinheit der Winkel

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{B_1\ C_1\ .\ B_2\ C_2\ .\ B_3\ C_3}{B_1\ C_2\ .\ B_2\ C_3\ .\ B_3\ C_4}.$$

Nun ist $B_1\ C_1 = p_1 = 52$; also $B_1\ C_2 = d_1 - B_1\ C_1 = 58 - 52 = 6$,

Fig. 106.




$$B_2\,C_2 = \frac{B_1\,C_2 \cdot p_2}{B_1\,C_2 - p_2} = \frac{6 \cdot 4}{6 - 4} = 12,$$

also $B_2\,C_3 = B_2\,C_2 - d_2 = 12 - 9 = 3,$

$$B_3\,C_3 = \frac{B_2\,C_3 \cdot p_3}{B_2\,C_3 + p_3} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = 1{\cdot}71.$$

Der Aufgabe gemäß ist $B_3\,C_4 = p_4 = 2{\cdot}7$. Folglich ist die Vergrößerung des Fernrohrs

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{52 \cdot 12 \cdot 1{\cdot}71}{6 \cdot 3 \cdot 2} = \text{nahe } 22$$

und die Distanz der beiden Linsen des Oculars, nämlich $C_3\,C_4 = d_3 = B_3\,C_3 - p_4 = 4{\cdot}41$ cm.

25. Richtet man das Fernrohr nach einem in gleiche Theile getheilten Maßstab (oder einem andern gleich getheilten Gegenstand, z. B. einem Ziegeldache), sieht dann mit dem einen Auge durch das Fernrohr, mit dem andern Auge neben dem Fernrohr vorbei, und beobachtet, daß $n$ mit dem freien Auge gesehene Maßstabtheile dieselbe Größe haben wie $m$ Maßstabtheile des im Fernrohr gesehenen Bildes, so ist die Vergrößerung $= \frac{n}{m}$.

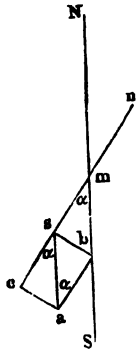
(Das Verfahren setzt indessen gleiche Sehweite der beiden Augen voraus.)

26. Da die auf den Hohlspiegel fallenden Strahlen, wenn der Planspiegel nicht vorhanden wäre, in der Brennweite, also in einer Entfernung von 3 Fuß, sich vereinigen würden, durch den Planspiegel aber die Richtung der Strahlen nur so verändert wird, daß die Strahlenaxe senkrecht auf die Axe des Hohlspiegels zu stehen kommt, so muß der Planspiegel $3 - 0{\cdot}5 = 2{\cdot}5$ Fuß vom Hohlspiegel entfernt sein.

# Auflösungen zu XXXI.

1. Ist $NS$ (Fig. 107) die Richtung des magnetischen Meridians, $ns$ die Magnetnadel, und stellt $sa$ die Kraft $f$ dar, so giebt die auf die Nadel rechtwinkelige Componente $sb$ die gesuchte Kraft, und diese ist also $= f \sin \alpha = f \sin 30^0 = 1/2\, f$.

Fig. 107.




2. Den Pendelgesetzen gemäß hat man

$$f_1 : f_2 = 80^2 : 90^2 = 64 : 81.$$

3. $f : \varphi = 500^2 : 450^2 = 2500 : 2025.$

4. Aus $f : (\varphi + f) = 40^2 : 50^2$ folgt $\frac{\varphi}{f} = 9/16 = 0{\cdot}56.$

5. Bezeichnet $f$ die Intensität der magnetischen Einwirkung der Erde auf die Nadel, $f_1$ die des Pols des Magnetstabes in der Entfernung von 3 Zoll und $f_2$ diejenige in der Entfernung von 6 Zoll, so hat man:

$$1)\ f : (f + f_1) = 20^2 : 55^2,$$
$$\text{also } f_1 = 6{\cdot}56\, f.$$
$$2)\ f : (f + f_2) = 20^2 : 32{\cdot}5^2,$$
$$\text{also } f_2 = 1{\cdot}64\, f,$$

woraus folgt: $f_1 : f_2 = 6{\cdot}56 : 1{\cdot}64 = 4 : 1.$

Während also die Entfernung des Pols wächst, nimmt die Kraft, mit welcher er auf die Magnetnadel wirkt, mit dem Quadrat der Entfernung ab.

6. Die Torsion des Fadens beträgt im ersten Falle der Aufgabe $150^0 - 15^0$, im zweiten $336^0 - 12^0$; die Torsion, durch welche der Magnet um $1^0$ aus dem magnetischen Meridian abgelenkt wurde, ist also im ersten Falle $= \frac{150^0 - 15^0}{15} = 9^0$, im zweiten Falle $= \frac{336^0 - 12^0}{12} = 27^0$, der Magnet ist also dreimal stärker geworden.

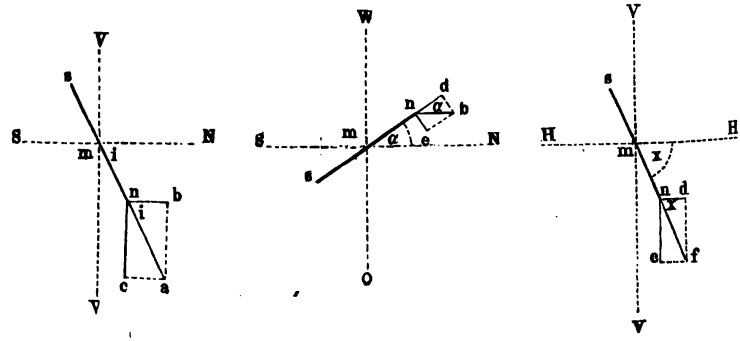
(Es ist hierbei vorausgesetzt: 1. daß sich die Torsionskräfte verhalten wie die Torsionswinkel, was den desfalls angestellten Versuchen entspricht, sowie 2. daß die Kraft, welche eine abgelenkte Magnetnadel in den magnetischen Meridian zurückzuführen strebt, dem Ablenkungswinkel proportional ist, was nur für kleine Winkel, bei denen die Sinus mit den Bogen vertauscht werden können, genau ist.)

7. I. Die Ebene der Fig. 108 (a. f. S.) sei die Ebene des magnetischen Meridians, $SN$ ihr Durchschnitt mit dem Horizont, $sn$ eine in ihr liegende

Inclinationsnadel, $VV$ eine Verticale durch deren Mitte. Stellt $na$ die Richtung und relative Größe der totalen magnetischen Erdkraft $J$ dar, welche auf den Pol $n$ wirkt, so ist $nb = J \cos i$ die horizontale, $nc = J \sin i$ die verticale Componente derselben*).

II. Wird dieselbe Nadel als Declinationsnadel aufgehängt, so wird durch die Art der Aufhängung die Wirkung der verticalen Componente aufgehoben, und die horizontale sucht die Nadel im magnetischen Meridian zu erhalten. Bei einer Ablenkung der Declinationsnadel $ns$ aus dem magnetischen Meridian um den horizontalen Winkel $\alpha$, wie in Fig. 109, deren Ebene die Horizontalebene darstellt, in welcher die Nadel liegt, kann man sich die auf den Pol $n$

Fig. 108. Fig. 109. Fig. 110.




wirkende magnetische Horizontalkraft $nb = J \cos i$ aus zwei Componenten zusammengesetzt denken, wovon die eine $nd = nb \cos \alpha = J \cos i \cos \alpha$ mit der Richtung der Kraft $nb$ den Winkel $\alpha$ einschließt, während die andere $ne = nb \sin \alpha = J \cos i \sin \alpha$ auf der ersten senkrecht steht und die Nadel in den magnetischen Meridian zurückzudrehen strebt.

III. Hängt man endlich die Magnetnadel $sn$ wieder als Inclinationsnadel auf und dreht ihre (verticale) Schwingungsebene um den Winkel $\alpha$ aus dem magnetischen Meridian, so ist (Fig. 110) die Richtung der Nadel gegen den Durchschnitt $HH$ ihrer verticalen Schwingungsebene mit der Horizontalebene um einen Winkel $x$ geneigt, der sich auf folgende Weise bestimmt: Die totale magnetische Erdkraft $J$, welche auf den Pol $n$ wirkt, läßt sich dem Vorhergehenden gemäß aus drei Componenten zusammengesetzt denken, wovon die erste $nc = J \sin i$ (siehe I.) in verticaler, die zweite $nd = J \cos i \cos \alpha$ (siehe II.) in horizontaler Richtung wirkt, die dritte $ne = J \cos i \sin \alpha$ (siehe II.) aber auf den beiden ersten senkrecht steht (und

*) Für die Bestimmung der Richtung der Nadel genügt es, bloß die Einwirkung der magnetischen Erdkraft auf einen Pol ins Auge zu fassen, da die Einwirkung auf die übrigen Punkte der Nadel eine Drehung in demselben Sinne zur Folge hat.

daher in Fig. 110 nicht darstellbar ist). Die letzte dieser drei Componenten wird durch die Art der Aufhängung der Inclinationsnadel aufgehoben, die beiden ersten aber setzen sich zu einer Resultirenden $n f$ zusammen, deren Neigung $x$ gegen die Horizontalebene sich ergiebt aus $tang\ x = \frac{n c}{n d}$ $= \frac{J \sin i}{J \cos i \cos \alpha}$ oder $cotang\ x = cotang\ i \cos \alpha$.

8. Aus der in voriger Aufgabe gefundenen Gleichung $cotang\ x = cotang\ i \cos \alpha$ folgt, da im vorliegenden Fall $\alpha = 90^0$ ist, $cotang\ x = 0$, also $x = 90^0$, d. h. die Inclinationsnadel steht vertical.

9. Man giebt der Schwingungsebene der Inclinationsnadel eine solche Lage, daß die Nadel vertical steht, alsdann steht der magnetische Meridian auf ihrer Schwingungsebene senkrecht.

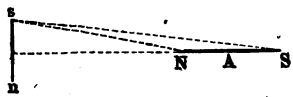
10. Befindet sich die Inclinationsnadel im magnetischen Meridian, so wirkt auf sie die ganze magnetische Erdkraft; steht dagegen ihre Schwingungsebene senkrecht auf dem magnetischen Meridian, so ist nur die verticale Componente jener Kraft auf die Richtung der Nadel von Einfluß (Aufgabe 8). Diese verticale Componente ist aber $= n c$ (Fig. 108), wenn $n a$ die ganze magnetische Erdkraft darstellt. Da sich nun die auf eine Magnetnadel wirkenden Kräfte wie die Quadrate der Schwingungen verhalten, welche die Nadel in gleicher Zeit macht, so hat man $\frac{n c}{n a} = \frac{30^2}{32^2}$, oder, da $\frac{n c}{n a} = \sin i$ ist, $\sin i = 0{\cdot}879$, woraus $i = 61^1/_2{}^0$ folgt.

11. $\frac{3 \cdot 4}{5^2} = 0{\cdot}48$ der Krafteinheit.

12. Das magnetische Moment der einen Hälfte des Stabes ist $= \mu \lambda$, das der andern Hälfte $= (-\mu)(-\lambda) = \mu \lambda$, also $M = 2 \mu \lambda$.

13. Bezeichnet $\nu$ die magnetische Flüssigkeitsmenge des Nordpols $N$ des Magnetstabes (Fig. 111), so ist die davon abhängige am Hebelarm $= 1$ der Nadel $n s$ angreifende Drehkraft (zufolge der Aufgaben 11 und 12) $= \frac{\nu m}{(e - 1/2\, l)^2}$

Fig. 111.

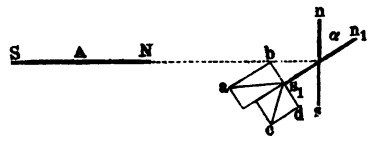



und die vom Südpol $S$ abhängige $= \frac{-\nu m}{(e + 1/2\, l)^2}$, also ist die von beiden Polen abhängige am Hebel $= 1$ der Nadel angreifende Drehkraft $F = \frac{\nu m}{(e - 1/2\, l)^2} + \frac{-\nu m}{(e + 1/2\, l)^2} = \frac{\nu m\,[(e + 1/2\, l)^2 - (e + 1/2\, l)^2]}{(e - 1/2\, l)^2\,(e + 1/2\, l)^2} =$ $\frac{2 \nu m e l}{(e^2 - 1/4\, l^2)^2}$, mithin, wenn $e$ so groß ist, daß man im Nenner $1/4\, l^2$ gegen $e^2$ vernachlässigen darf, $F = \frac{2 \nu m l}{e^3}$, oder, wenn man der vorigen Auf-

gabe gemäß $2vl = M$, d. h. dem magnetischen Moment des Stabes gleich setzt, $F = \frac{Mm}{e^3}$, d. h. die Kraft, welche, am Hebelarm 1 der Nadel angreifend, denselben Einfluß auf ihre Drehung ausübt, wie die in den verschiedenen Punkten der Nadel angreifenden Kräfte, ist $F = \frac{Mm}{e^3}$ mal so groß, als die Einheit der magnetischen Kraft, wie sie in Aufgabe 11 angenommen wurde.

14. Ist $m$ das magnetische Moment der Nadel $ns$ (Fig. 112), so ist die Drehkraft, welche der Magnetstab $NS$ vermöge seines magnetischen Moments $M$ in der Entfernung $e$ darauf äußert, bei senkrechter Richtung der Nadel auf der des Stabes (nach voriger Aufgabe) $= \frac{Mm}{e^3}$, also, wenn die Nadel um den Winkel $\alpha$ von der vorigen Lage abgelenkt und in die Lage $n_1 s_1$ gelangt ist, $= \frac{Mm}{e^3} \cos \alpha$. (Denn ist $s_1 a$ die ganze Drehkraft, so ist, wenn die Nadel die Lage $n_1 s_1$ hat, nur die auf die Richtung der Nadel senkrechte Componente $s_1 b = s_1 a \cos \alpha$ wirksam, die andere Componente in der Richtung der Nadel aber ohne Einfluß auf die Drehung.)

Fig. 112.




Bezeichnet nun $T$ eine Kraft, welche am Hebelarm $= 1$ einer Nadel vom magnetischen Moment $= 1$ gerade so auf die Nadel wirkt, wie die horizontale Componente des Erdmagnetismus, so ist die Kraft, mittelst welcher eine auf der Richtung des magnetischen Meridians senkrecht stehende Declinationsnadel vom magnetischen Moment $m$ durch den Erdmagnetismus gedreht wird, $= Tm$, also, wenn eine solche Nadel, wie in vorliegender Aufgabe, mit dem magnetischen Meridian den Winkel $\alpha$ bildet, $= Tm \sin \alpha$. (Denn ist $s_1 c = Tm$ die Kraft, mit welcher die auf dem magnetischen Meridian senkrecht stehende Nadel durch den Erdmagnetismus gedreht wird, so ist $s_1 d = s_1 c \sin \alpha$ die für die Drehung allein wirksame Componente derselben, wenn die Nadel die Lage $n_1 s_1$ hat.)

Damit die Nadel bei gleichzeitiger Einwirkung des Magnetstabes und des Erdmagnetismus ihre Lage $n_1 s_1$ beibehalte, muß $s_1 b = s_1 d$, d. h. $\frac{Mm}{e_3} \cos \alpha = Tm \sin \alpha$ sein, woraus $\frac{M}{T} = e^3 \operatorname{tang} \alpha$, also im vorliegenden Falle $\frac{M}{T} = 350^3 \operatorname{tang} 11^0 20' = 8\,593\,220$ folgt, d. h. die vom Magnetstabe ausgeübte Drehkraft ist 8 593 220mal so groß, als die von der horizontalen Componente des Erdmagnetismus bewirkte.

# Auflösungen zu XXXII.

1. Da die Kräfte, welche den Faden zu drehen streben, den Windungen desselben proportional sind, so verhalten sich die Abstoßungskräfte wie $25 : (146 + 10)$, d. h. nahezu wie $5^2 : 12{\cdot}5^2$, während sich die Entfernungen nahezu wie $25 : 10$, d. h. wie $12{\cdot}5 : 5$ verhalten, also die Abstoßungskräfte umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen.

2. a) Aus $\frac{6 \cdot x}{2^2} = 12$ folgt $x = 8$. b) $y = \frac{9 \cdot 4}{3^2} = 4$.

3. $^6/_3 = 2$.

4. a) Wie $9 : 4$.

   b) Wie $\frac{4}{2^2} : \frac{5}{3^2}$, d. h. wie $9 : 5$.

5. 100mal größer.

6. $\frac{48 \cdot 3 - 8 \cdot 4}{48 + 8} = 2$.

7. Da die Schlagweite einer Batterie der Dichtigkeit der angehäuften Elektricität proportional ist, so hat man $\frac{100}{4} : \frac{160}{8} = 3 : x$, also $x = 2{\cdot}4$ Linien.

8. Bezeichnet $y$ die gesuchte, gebundene Elektricitätsmenge auf der ersten Belegung, so muß $y = me$ sein, und wenn man für $e$ seinen Werth $mE$ setzt, $y = m^2 E = 0{\cdot}99^2\, E = 0{\cdot}9801\, E$, d. h. nahe $^{49}/_{50}\, E$ ist gebunden und $^1/_{50}\, E$ ist frei.

   Aus $E - \varepsilon = m^2 E$ folgt die Condensationskraft $\frac{E}{\varepsilon} = \frac{1}{1 - m^2}$ und im vorliegenden Falle $= 50$, d. h. die Menge der gesammten Elektricität ist 50mal so groß als die der freien.

9. Bezeichnet man die Gesammtladung der obern Belegung im Anfange des Versuches mit $E$, und die auf der untern Belegung gebundene Menge der entgegengesetzten Elektricität mit $e$, so ist die auf der obern Platte im Anfange des Versuches gebundene Menge $= E - \varepsilon_1$, dagegen die auf der untern Platte gebundene Menge, nach Ableitung der Elektricität der obern Platte, $= e - \varepsilon_2$, und man hat dann nach voriger Auflösung die drei Gleichungen:

$$e = mE;\ E - \varepsilon_1 = m^2 E;\ e - \varepsilon_2 = m^2 e,$$

woraus nach Elimination von $E$ und $e$ folgt: $m = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

**10.** Es sei $x$ die Dichte der auf der Kupferplatte zurückbleibenden freien negativen Elektricität, so ist, die Oberfläche der Platte als Flächeneinheit angenommen, $d - x$ die von ihr abgegebene Menge. Damit nun die elektrische Differenz der beiden Metalle bestehen bleibe, muß die Zinkplatte dieselbe Menge negativer Elektricität abgeben, also um eben so viel an positiver zunehmen. Es wird also eine Menge $= 2\,(d - x)$ negative Elektricität an den Leiter abgegeben, und diese vertheilt sich auf der Oberfläche desselben; man hat daher $2\,(d - x) = nx$, folglich $x = \frac{2d}{n+2}$, sowie, wenn $y$ die Dichte der freien positiven Elektricität auf der Zinkplatte bezeichnet, $y = d + \left(d - \frac{2d}{n+2}\right) = \frac{2\,(n+1)\,d}{n+2}$. Für $n = \infty$ wird $x = 0$ und $y = 2d$.

**11.** Die Dichtigkeit der Elektricität auf der Kupfermasse mit $x$, die auf der Zinkmasse mit $y$ bezeichnet, erhält man aus den Formeln der vorigen Aufgabe, da hier $d = 1$, $n = 2$ ist, $x = 1/2$, $y = 3/2$.

**12.** Reducirt man die 55·8 cbcm Knallgas auf die Normaltemperatur und den Normaldruck, so erhält man $55{\cdot}8 \cdot \frac{330}{336} \cdot \frac{1}{1 + 0{\cdot}003665\,.\,15}$ $= 52$ cbcm und aus $s : 1 = 52 : 1$ folgt dann $s = 52$.

**13.** Aus $s : 1 = tang\ 30^0 : tang\ 45^0$ folgt $s = tang\ 30^0 = 0{\cdot}5774$.

**14.** Bezeichnet man die Stärke des ersten Stromes mit $s_1$, die des zweiten mit $s_2$, so verhält sich $s_1 : s_2 = tang\ 30^0 : tang\ 45^0$,

$$\frac{\text{so wie } s_1 : s_2 = 49{\cdot}7 \quad : \quad v}{\text{also auch } tang\ 30^0 : tang\ 45^0 = 49{\cdot}7 : v;}$$

folglich, da $tang\ 45^0 = 1$ ist, $v = \frac{49{\cdot}7}{tang\ 30^0} = 86{\cdot}08$ cbcm.

**15.** Auf dieselbe Weise, wie in vorhergehender Auflösung, berechnen sich die Gasmengen, welche durch einen Strom entwickelt werden, der die Nadel um $45^0$ ablenkt, aus 1) $= 85{\cdot}2$; aus 2) $= 85{\cdot}3$; aus 3) $= 85{\cdot}7$; aus 4) $= 86{\cdot}1$; aus 5) $= 85{\cdot}2$; also im Mittel aus den fünf Beobachtungen $= 85{\cdot}5$ cbcm bei 333 par. Linien Luftdruck und $12^0$ C. Temperatur; folglich ist $v_1 = 85{\cdot}5 \cdot \frac{333}{336} \cdot \frac{1}{1 + 0{\cdot}003665\,.\,12} = 81{\cdot}2$ cbcm.

**16.** Die in voriger Aufgabe gefundene Zahl $v_1 = 81{\cdot}2$ giebt in Einheiten der vorliegenden Aufgabe die Stärke eines Stromes an, der die Nadel der Tangentenbouſſole, für welche jene Zahl gefunden wurde, um $45^0$ ablenkt.

Nun ist $s : 81{\cdot}2 = tang\ 21^0 : tang\ 45^0$, also $s = 81{\cdot}2 \,.\, tang\ 21^0 = 31{\cdot}2$. (Man nennt $v_1 = 81{\cdot}2$ den Reductionsfactor.)

17. $81{\cdot}2\ tang\ 56^0 = 120{\cdot}4$ cbcm (siehe vor. Aufgabe).

18. Nach voriger Aufgabe würden durch den Strom $81{\cdot}2 \,.\, tang\ 10^0 = 14{\cdot}3$ cbcm Knallgas in der Minute entwickelt werden, oder, da 1 cbcm Knallgas 0·537 mg (Anhang, Tab. 9, c) wiegt, $14{\cdot}3 \,.\, 0{\cdot}537 = 7{\cdot}68$ mg Knallgas in der Minute. Das chemische Aequivalent des Knallgases verhält sich aber zu dem des Kupfers wie 9 : 31·7; der Kupferniederschlag beträgt also $\frac{31{\cdot}7 \,.\, 7{\cdot}68}{9} = 27{\cdot}05$ mg in der Minute, also $24 \,.\, 60 \,.\, 27{\cdot}05 = 38\,952$ mg = nahe 39 g in 24 Stunden.

19. In einer Minute werden $\frac{144}{24 \,.\, 60} = 0{\cdot}1$ g Silber niedergeschlagen, und das Aequivalent dieses Niederschlages sind $\frac{0{\cdot}1 \,.\, 9}{108} = 0{\cdot}00833 \ldots$ g Knallgas, oder, da ein Cubikcentimeter dieses Gases 0·537 mg wiegt, $\frac{8{\cdot}333}{0{\cdot}537} = 15{\cdot}5$ cbcm, also die Stromstärke = 15·5.

20. Da sich die Widerstände $w_1$ und $w_2$ zweier Drähte des nämlichen Metalls direct verhalten wie ihre Längen und umgekehrt wie ihre Querschnitte, so hat man im vorliegenden Falle $w_1 : w_2 = \frac{x}{0{\cdot}25^2\pi} : \frac{40}{0{\cdot}5^2\pi}$, also, da die Widerstände gleich sein sollen, $\frac{x}{0{\cdot}25^2\pi} = \frac{40}{0{\cdot}5^2\pi}$, woraus $x = 10$ m folgt.

21. a) $w = \frac{20}{0{\cdot}4^2} = 125.$

b) $w = \frac{20}{4{\cdot}4^2} \cdot 10$ (siehe Tabelle 27 im Anhange) = 1250.

22. Bezeichnet $l$ die Länge der beiden Drähte, $d$ den Durchmesser des Kupferdrahtes, $x$ den des Eisendrahtes, so folgt aus $\frac{l}{d^2} = \frac{l}{x^2} \cdot 6 \ldots x = 2{\cdot}45\,d$, der Eisendraht muß also 2·45mal so dick sein als der Kupferdraht.

23. Weil der Eisendraht nicht bloß viel billiger ist, sondern auch eine viel größere Festigkeit hat, als der Kupferdraht von gleichem Leitungswiderstand.

24. a) $w = \frac{7500}{9 \,.\, 2^2\pi} = 66{\cdot}3$ S. E.

b) $w_1 = \frac{7500 \,.\, 6}{4^2} = 2812{\cdot}5$ J. E.

25. Bezeichnet $l$ die Länge des Drahtes in Metern, $d$ seine Dicke in Millimetern, so hat man die beiden Gleichungen $\frac{l}{d^2} = 100$ (siehe vor. Aufg.)

und $^1/_4 \left(\frac{d}{100}\right)^2 \pi \,.\, 10\, l \,.\, 8{\cdot}8 = 1$ (Kg), woraus $l = 120$ m, $d =$ nahe 1·1 mm folgt.

**26.** Aus $\frac{6 \,.\, 0{\cdot}3 - x \,.\, 0{\cdot}3}{1{\cdot}2^2} = \frac{1{\cdot}3}{2{\cdot}8^2}$ folgt $x = 5{\cdot}2$ (siehe Aufgabe 20).

**27.** a) In diesem Falle geht die Ohm'sche Formel in $s_1 = \frac{ne}{n\lambda + l}$ über, woraus folgt, daß die Vermehrung der Elemente bei einem sehr kleinen Widerstande im Schließungsdrahte nichts nützt, bei einem sehr großen aber die Stromstärke proportional der Anzahl der Elemente steigert.

b) In diesem Falle wird sie $s_2 = \frac{e}{\frac{\lambda}{m} + l} = \frac{me}{\lambda + ml}$, woraus folgt, daß die Vergrößerung der Erregerplatten bei einem sehr kleinen Widerstande im Schließungsdrahte den Strom in demselben Verhältnisse steigert, bei einem sehr großen Widerstande aber nichts nützt.

**28.** Erklärt sich aus voriger Auflösung, wenn man berücksichtigt, daß Metalldrähte viel besser leiten, als der menschliche Körper.

**29.** Bezeichnet $e$ die elektromotorische Kraft des Elementes, sowie $\lambda$ die Länge eines Kupferdrahtes von 1 mm Dicke, welcher dem Strome denselben Widerstand leistet, wie das Element und das Leitungssystem der Boussole, so hat man, da der Widerstand des Argentandrahtes (siehe Aufgabe 21) dem eines Kupferdrahtes von 1 mm Dicke und $\frac{4}{1{\cdot}1^2} \cdot 11{\cdot}83 = 39{\cdot}1$ m Länge gleich ist, nach dem Ohm'schen Gesetze die beiden Gleichungen:

$$tang\ 33^0 = \frac{e}{\lambda} \text{ und } tang\ 9^0 = \frac{e}{\lambda + 39{\cdot}1},$$

wobei derjenige Strom als Einheit angenommen ist, welcher die Nadel um $45^0$ ablenkt. Daraus ergiebt sich

a) $\lambda = \frac{39{\cdot}1\ tang\ 9^0}{tang\ 33^0 - tang\ 9^0} = 12{\cdot}61$, d. h. der gesuchte Widerstand ist gleich dem eines Kupferdrahtes von 12·61 m Länge und 1 mm Dicke.

b) $e = \frac{39{\cdot}1 \,.\, tang\ 9^0 \,.\, tang\ 33^0}{tang\ 33^0 - tang\ 9^0} = 12{\cdot}61 \,.\, tang\ 33^0 = 8{\cdot}2$, d. h. die elektromotorische Kraft des Elementes ist 8·2mal so groß als die angenommene Einheit der Stromstärke. In den Stromeinheiten der Aufgabe 15 ausgedrückt und vorausgesetzt, daß die hier gebrauchte Tangentenboussole dieselbe ist wie dort, ist $e = 8{\cdot}2 \,.\, 81{\cdot}2 = 665{\cdot}8$, d. h. so viel Cubikcentimeter Knallgas würde der Strom des Elementes in einer Minute geben, wenn der Gesammtwiderstand gleich würde dem Widerstande eines 1 m langen und 1 mm dicken Kupferdrahtes.

30. Bezeichnet man die elektromotorische Kraft des Elementes mit $e$, den Leitungswiderstand in der Kette, wenn der Strom durch die Erde zurückkehrte, mit $r_1$, dagegen den, wenn der Strom durch den zweiten Draht zurückfloß, mit $r_2$, so hat man

$$\sin \alpha_1 = \frac{e}{r_1}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{e}{r_2},$$

also $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{r_2}{r_1}$, wobei zu bemerken ist, daß hier der Leitungswiderstand des Elementes ganz vernachlässigt werden kann (Aufgabe 24), $r_1$ und $r_2$ also nur die Leitungswiderstände bezüglich in dem einen Draht und der Erde — und in beiden Drähten darstellen.

Bezeichnet man den specifischen Leitungswiderstand des Drahtes bei der Länge 1 mit $W$, den der Erde für eine gleiche Länge mit $w$, sowie mit $l$ die auf die Dicke des Leitungsdrahtes reducirte Länge des Drahtes der Spirale, so hat man

$$r_1 = W(L + l) = w d, \; r_2 = W(2L + l),$$

$$\text{also } \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{W(2L + l)}{W(L + l) + w d},$$

woraus folgt: $\frac{W}{w} = \frac{d \sin \alpha_1}{(2L + l) \sin \alpha_2 - (L + l) \sin \alpha_1}$

$$= \frac{14\,800 \sin (32^0 10')}{32\,800 \sin (20^0 30') - 16\,700 \sin (32^0 10')} = 3{\cdot}14,$$

d. h. der Leitungswiderstand eines Kupferdrahtes von 1 W. Linie Dicke ist 3·14mal größer, als der eines gleich langen, vom elektrischen Strome durchflossenen Theiles des Erdkörpers von unbekanntem Querschnitte.

31. Durch die Verkürzung wird die elektromotorische Kraft der Kette $a$mal so klein wie vorher, also $= \frac{ne}{a}$. Ohne Flächenvergrößerung der Elemente würde jetzt auch der Leitungswiderstand der Kette $a$mal so klein wie vorher, also $= \frac{n\lambda}{a}$ sein, vermöge der $a$fachen Vergrößerung der Elemente wird er indessen abermals $a$mal so klein, also $= \frac{n\lambda}{a^2}$, daher die Stromstärke

$$x = \frac{\frac{ne}{a}}{\frac{n\lambda}{a^2} + l}.$$

32. Man kann die 12 Elemente mit einander verbinden a) als zwölf einfache Elemente; b) als sechs doppelte; c) als vier dreifache; d) als drei vierfache; e) als zwei sechsfache und f) als ein zwölffaches Element. Die Stromstärken dieser verschiedenen Ketten sind nun:

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06445 4625